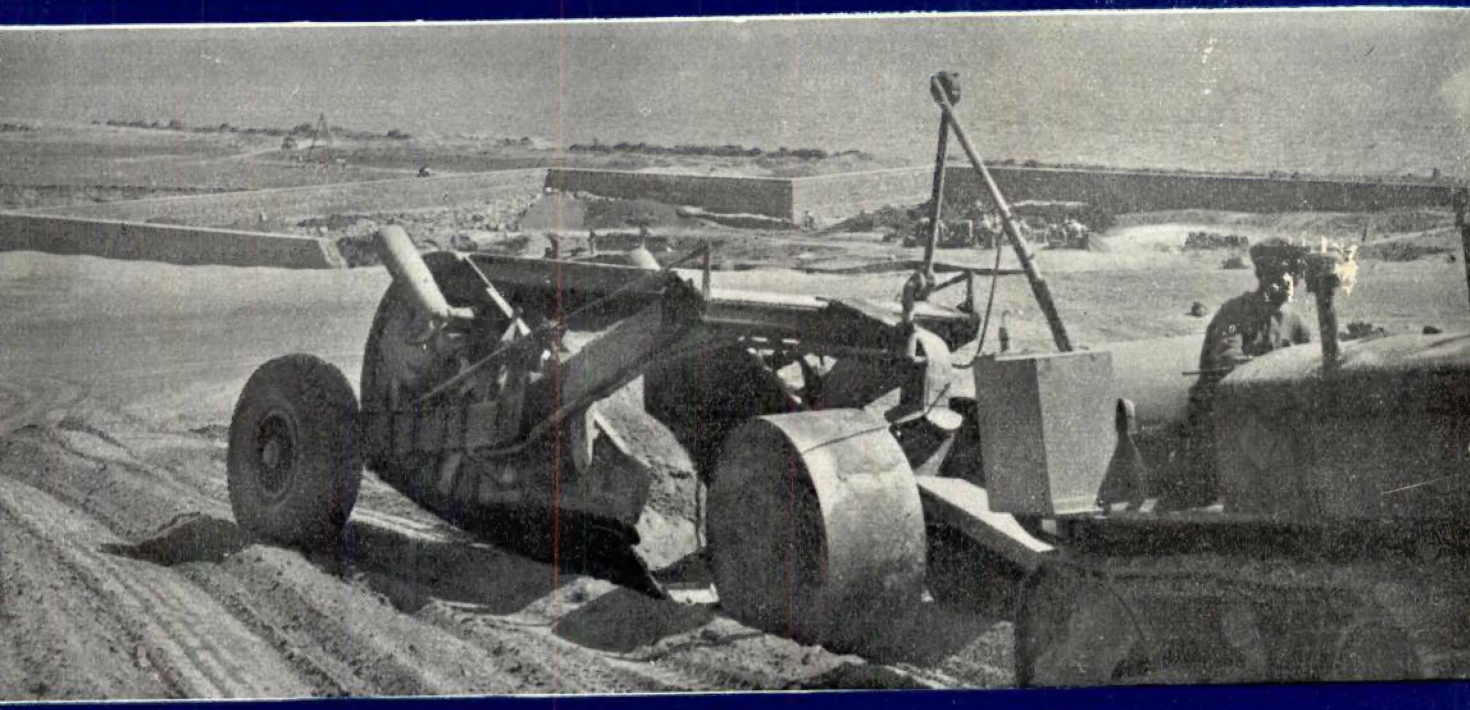
TÉCNICA



REVISTA DE ENGENHARIA
DOS ALUNOS DO I.S.T.

N.º 101 - Abril - 1939

"LUSALITE"

fibro-cimento nacional

EM

INCOMBUSTÍVEL
LEVE
RESISTENTE
ISOLADOR
IMPUTRESCÍVEL

Tubos para pressões hidráulicas de 3 a 12 K.os/cm.2
Chapas onduladas para coberturas
Chapas lisas para revestimento de tetos, tabiques, etc.
Produtos da Sociedade Portuguesa de Fibro-cimento

ÚNICOS CONCESSIONÁRIOS:

CORPORAÇÃO MERCANTIL PORTUGUESA, L.da

Rua de S. Nicolau, 123

Telefones: 2 3948 — 2 8941 — **LISBOA** — Telegramas: **Lusalite**

Barricas de 180 kilos

Sacos de juta de 50 kilos

Sacos de papel de 50 kilos

Sede: Rua do Caes de Santarem, 64, 1.º — LISBOA
Filial do Norte: Rua Formosa, 297, 1.º — PORTO

AGÊNCIAS EM TODO O PAÍS

NÚMERO
101
Abril — 1939

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA
DOS
ALUNOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO
Redacção e Administração: AV. ROVISCO PAIS, IST / LISBOA-N. / TEL. 49144 (linha 50)

DIRECTOR
Roberto M. Charters d'Azevedo
ADMINISTRADOR
PEDRO ARSÉNIO NUNES
BIBLIOTECÁRIO
CARLOS KRUS ABECASIS
CORPO REDACTORIAL
ISABEL MARIA GAGO
MANUEL REIS DE CARVALHO
ARTUR SILVA MARQUES

NÚMERO AVULSO..... 5$00

ASSINATURAS:

	3 N.os	6 N.os	12 N.os
Continente e Ilhas	12$00	23$00	44$00
Colónias Portuguesas e Espanha...	—	30$00	55$00
Estrangeiro...	—	40$00	70$00

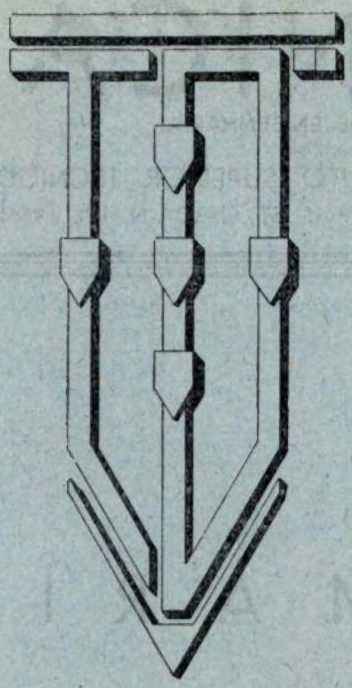
EDITOR E PROPRIETÁRIO
ASS. DOS ALUNOS DO I. S. T.

COMPOSTO E IMPRESSO
NAS
OFICINAS FERNANDES
RUA CRUZ DOS POIAIS, 103
LISBOA

SUMÁRIO

CAPA — Um nivelamento mecânico.

		Págs.
Sur l'Evolution continue des variables physiques	António Gião	241
A vida comercial e industrial	Eng. José Mendes Leal	273
Estudo sôbre as águas das praias da Parede	Eng. Civil António M. Vasconcelos	277
Os pioneiros da eléctricidade	Hilário Cruz	282
Do Mundo Técnico		286
Notas bibliográficas		289
Publicações recebidas		290



FUNDAÇÕES GARANTIDAS

Um processo especial para cada caso

Eng. Ricardo E. Teixeira Duarte

Projecto e execução de tôdas as fundações de responsabilidade feitas ùltimamente em Lisboa

Consolidações do solo

Captações de águas

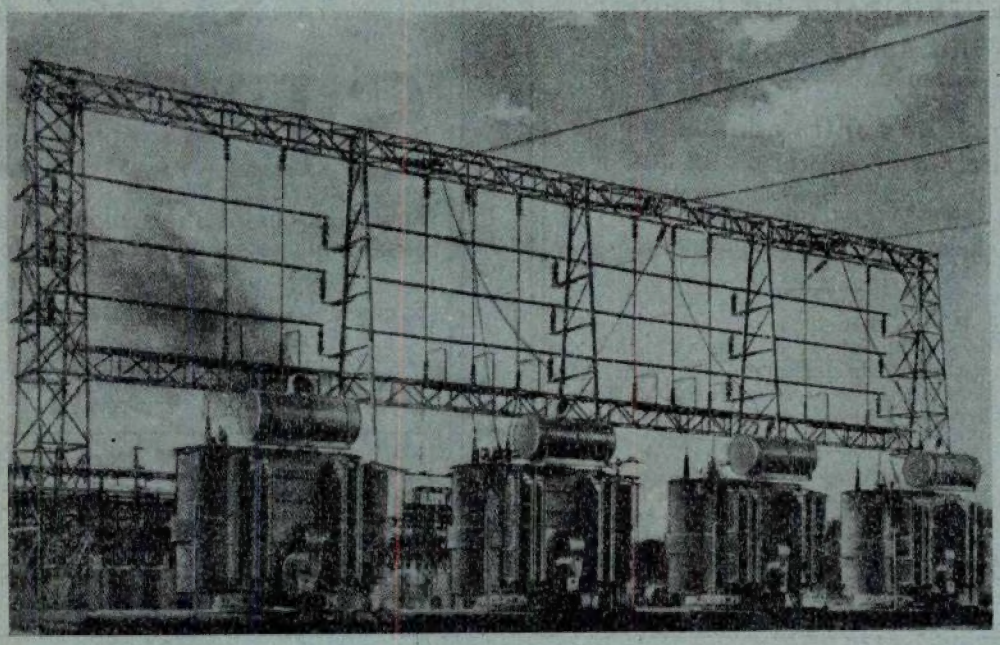
Sondagens geológicas

EMPRÊSA DE SONDAGENS E FUNDAÇÕES, L.DA

Rua Augusta, 280, 3.º e 4.º — LISBOA

GENERAL ELECTRIC

Schenectady, N. Y.



Sub-estação ao ar livre de 25.000 kVA, 220.000 volts

Motores e dínamos. Alternadores. Transformadores. Aparelhos para alta e baixa tensão. Centrais termo e hidroeléctricas. Electrificação de fábricas. Tracção eléctrica. Máquinas para soldadura eléctrica. Automotoras Diesel-Eléctricas. Turbinas de vapor. Máquinas frigoríficas Aparelhos de iluminação. Instrumentos de medida. Comandos eléctricos especiais para fábricas téxteis, fábricas de papel, etc.

THOMSON
GENERAL ELECTRIC

Portuguesa, L.da

LISBOA
Rua do Norte, 5

Telef. 28135-28136

União Eléctrica Portugueza, S. A.

SEDE SOCIAL

Rua Duque de Loulé, 240 — PORTO

CAPITAL { Acções..... 40:000 contos
Obrigações 30:500 contos

ELECTRICIDADE DO LINDOSO

FORÇA { Hidráulica..... 40:000 HP
Térmica ..... 20:000 HP

Potência já contratada 20:000 HP
Potência disponível... 22:000 HP

Extensão total das linhas em exploração: 1:000 quilómetros

A **U. E. P.** tem as melhores tarifas e concede as maiores facilidades para electrificação de fábricas e para abastecimento de rêdes de distribuïção nos Distritos de: **Viana do Castelo, Braga, Pôrto, Aveiro, Coimbra, Vizeu e Leiria.**

Consultai a U. E. P.

CIMENTO

SECIL

Fabricado pelos mais modernos processos e preferido para todos os trabalhos de responsabilidade.
Sacos de papel ou de juta com 50 Kg.
Barricas de 180 Kg.

S E C I L

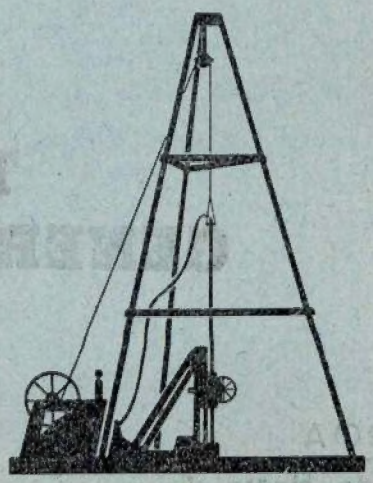
COMPANHIA GERAL DE CAL E CIMENTO
RUA DO COMERCIO, 56, 3.º
LISBOA

Sondages. Etanchements. Consolidations "Procédés Ródio"

Sondagens geológicas
Estudo da resistência e permeabilidade de terrenos; laboratório geofísico
Consolidação e impermeabilização de terrenos e alvenarias por meio de injecções de cimento, produtos químicos, emulsão betuminosa Shellperm, etc.
Estacas de beton armado, sistema **Ródio** sem fazer trepidar o solo
Rebocos comprimidos por «cement gun»
Fundações em terrenos difíceis por congelação artificial, ou baixando o nível da água friática.

Sociedade Anónima com séde em PARIS

As melhores referências no paiz e no estrangeiro



Engenheiro delegado para Portugal

Walter Weyermann

P. do Município, 32-2.º--LISBOA Tel. 2 8685

TÉCNICA

ROBERTO CHARTERS D'AZEVEDO
DIRECTOR

ANO XIV - N.º 101 ABRIL 1939

SUR L'ÉVOLUTION CONTINUE DES VARIABLES PHYSIQUES

PAR ANTÓNIO GIÃO

Do distinto engenheiro geofísico, diplomado pela Universidade de Estrasburgo, António Gião, recebemos, juntamente com uma cativante carta em que promete continuar a colaborar na «Técnica», a presente memória que, devido à sua gentileza, publicamos.

É com satisfação que a «Técnica» regista a colaboração de um Português ilustre que longe da sua Pátria tem, no domínio da física e em especial nos ramos desta ciência que mais interessam ao estudo dos fenómenos meteorológicos (hidrodinâmica e termodinâmica) produzido já, obra de valor, extensa e tão notável.

Résumé — Le but du mémoire est de jetter les bases d'une théorie pouvant conduire à des prévisions effectives de l'évolution continue des champs aussi bien dans le cas où les actions extérieures sont constantes que lorsqu'elles sont variables.

On commence par montrer que si on considère, dans le champ $U(x, y, z, t)$ d'une grandeur U (dont il s'agit de prévoir l'évolution continue), un volume V limité par une surface S, on peut remplacer l'évolution de $U(x, y, z, t)$ dans V par une fonction $\Psi(x, y, z, t)$ satisfaisant à l'équation des ondes et prenant à chaque instant *sur S* les valeurs de U. On montre ensuite que la prévision de l'évolution de Ψ sur S peut être ramenée à la solution d'une équation linéaire aux dérivées partielles du type hyperbolique simple et à trois variables indépendantes. La solution du problème de Cauchy, relatif à cette équation, généralise la formule classique de Poisson et se réduit à cette formule dans le cas où, pour prévoir Ψ en un point de S, on peut partir de données initiales sur une surface S comprenant une partie plane.

Ayant déterminé l'évolution de Ψ, on indique quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes auxquelles doit satisfaire U pour qu'on puisse affirmer qu'à tout instant *de l'avenir* les valeurs prédéterminées de Ψ par la formule de Poisson généralisée coïncident avec les valeurs de U.

Le mémoire se termine par une application de la théorie à la prévision quantitative du temps.

Introduction — Dans un récent ouvrage [1], nous avons exprimé le principe universel d'action de contact par une équation d'évolution reliant, pour une grandeur quelconque, les variations temporelles aux variations spatiales relatives à des intervalles de temps et à des domaines d'espace de durée et d'étendue quelconques. De cette équation on déduit d'une part des équations d'évolution aux dérivées partielles et d'autre part une équation générale de prévision sous forme finie. Celle-ci donne la valeur d'une grandeur en un point quelconque du champ et à chaque instant de l'avenir en fonction des valeurs initiales autour du point et des valeurs passées au même point.

La présence et la variation des actions extérieures qui agissent sur le champ interviennent, dans l'équation de prévision, par l'intermédiaire de deux fonctions de l'espace et du temps. Nous avons indiqué, dans l'ouvrage cité, comment on peut prédéterminer l'évolution de ces fonctions lorsque le champ étudié constitue un système isolé ou fait partie d'un tel système. Lorsque le nombre de champs — ou plus exactement de «cellules» — qui forment le système est considérable, cette méthode devient impraticable, parce qu'elle conduit alors à des calculs trop longs. L'équation de prévision, tout en ayant une applicabilité théorique générale, ne peut donc conduire pratiquement à des prévisions effectives que si le nombre de cellules du système est très petit, et particulièrement s'il est possible de négliger l'évolution des actions extérieures vis-à-vis de l'évolution du champ à prévoir. Cette condition se réalise souvent dans les expériences de laboratoire, où l'on peut fréquemment admettre que les actions extérieures qui agissent sur un champ sont permanentes. Dans la nature même, il n'est pas rare de rencontrer des champs où la variation des actions extérieures peut être négligée par rapport à l'évolution observée. C'est par exemple le cas de l'atmosphère, qui est souvent — du moins dans certaines régions — dans un état de mouvement tel que la partie du champ total qui correspond aux actions extérieures (cette partie est le mouvement entretenu presque exclusivement par le rayonnement solaire direct et réfléchi) est quasi permanente par rapport au champ total que donnent les observations (superposition du champ entretenu et des perturbations spontanées). Il en est ainsi chaque fois qu'un milieu fluide, par suite de la formation de perturbations spontanées, se trouve en «régime turbulent», malgré la quasi permanence des actions extérieures.

De nombreuses évolutions sont au contraire presque entièrement entretenues (ou continuent par inertie après avoir été entretenues). Les changements temporels sont alors du même ordre de grandeur que les variations des actions extérieures (phénomènes de propagation en général). D'ailleurs, malgré la présence de perturbations spontanées, on ne peut pas toujours, dans les milieux fluides, négliger la variabilité des actions extérieures. En particulier, dans l'atmosphère des changements importants doivent parfois être attribués à des variations du champ entretenu et la prévision du temps à longue échéance repose presque entièrement sur la possibilité de la prévision de l'évolution du champ entretenu (circulation générale). On comprend donc le grand intérêt que présenterait une méthode permettant de prévoir l'évolution (d'une manière effective et non seulement théorique) tout aussi facilement lorsque les actions extérieures varient que lorsqu'elles sont permanentes.

Le but de ce mémoire est précisément d'exposer un premier effort vers une telle théorie. Nous commencerons par quelques considérations sur certains caractères généraux de l'évolution des champs qui sont indispensables à connaître pour pouvoir donner au principe d'action de contact la nouvelle forme que nous cherchons. Ensuite nous exposons les bases proprement dites de la théorie et les résultats qui sont valables quelle que soit l'évolution étudiée. Enfin, nous nous occupons d'une application de la théorie à un problème de grande importance théorique et pratique: la prévision quantitative du temps et particulièrement du champ de la pression atmosphérique.

---

[1] *«Phénoménologie Unitaire» — «Recherches sur les propriétés générales de l'évolution»* — 1 vol. et *Actualités Scientifiques* N°s 758, 759, 760; Hermann, Paris, 1938.

Dans ce mémoire il ne sera question que de l'évolution habituelle dans l'espace tridimensionnel euclidien. La théorie plus générale pour des espaces à un nombre quelconque de dimensions à métrique quelconque sera développée ultérieurement ainsi que l'examen d'applications a d'autres phénomènes.

1 — *Classification des évolutions* — Considérons le champ d'une grandeur quelconque U occupant un domaine D de l'espace d'étendue quelconque (fig. 1). Soit S une surface fermée

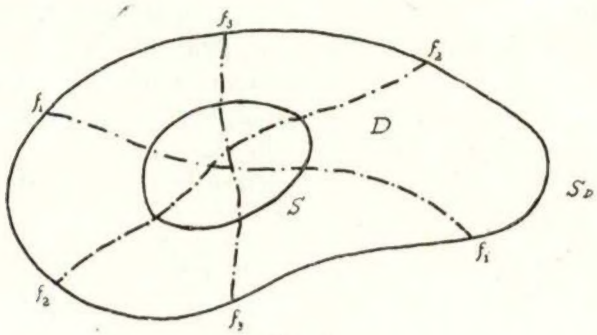


Fig. 1

quelconque du domaine D, S pouvant être confondue avec la frontière S_D de D. Désignons par t le temps et par x_k l'une quelconque des deux coordonnés (u, v) de Gauss qui fixent la position d'un point A sur la surface S.

A chaque instant la fonction U est bien définie en chaque point de S, bien que pouvant présenter, ainsi que ses dérivées $\frac{\partial^n U}{\partial t^n}$, $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ d'ordre quelconque des discontinuités le long de certaines lignes fixes $[f_i(u, v) = 0]$ ou mobiles $[f_i(u, v, t) = 0]$ de la surface S. Ces lignes sont les intersections avec S de surfaces de discontinuité de U ou de ses dérivées dans le domaine D, et leur existence provient en dernière analyse de discontinuités dans l'évolution des actions extérieures.

Portant notre atention sur ces lignes de discontinuité et considérant spécialement l'évolution de U sur S, nous devons distinguer deux cas fondamentalement différents:

1.° — Pendant l'intervalle de temps qui correspond à l'échéance de la prévision qu'on désire faire de l'évolution de U, il n'y a pas de créations de nouvelles lignes de discontinuité sur S. En un point A de S, la fonction U (t) et ses dérivées $\frac{\partial^n U}{\partial t^n}$ d'ordre quelconque ne peuvent présenter une discontinuité qu'aux moments où passent en A des lignes de discontinuité préexistantes de U ou des dérivées $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ (par discontinuités préexistantes nous entendons les discontinuités qui existaient déjà sur S avant l'instant initial t_o).

2.° — Il y a création, c'est-à-dire apparition de nouvelles discontinuités de U et $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ sur la surface S. Dans ce cas, la fonction U (A, t) et ses dérivées $\frac{\partial^n U(A, t)}{\partial t^n}$ d'ordre quelconque peuvent présenter des discontinuités proviennent: 1.° — du passage en A de discontinuités de U ou $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ préexistantes; 2.° — du passage en A de nouvelles discontinuités (creées sur S après t_o). Il peut arriver aussi que, pendant l'intervalle de temps considéré et pour un ou plusieurs de ses moments, le point A soit précisément celui où de nouvelles discontinuités de U et de $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$

font leur apparition sur S. Il faut remarquer ici qu'une nouvelle discontinuité n'apparait sur S — abstraction faite de quelques cas exceptionnels — sans être d'abord apparue sur la frontière (S_D) du champ, à la suite de discontinuités dans les actions extérieures.

L'importance de la distinction que nous venons de faire entre évolutions avec ou sans création de nouvelles discontinuités sur une surface fermée S du champ, est très grande. Nous verrons en effet que c'est cette distinction qui décide de la possibilité de la prévision de U par l'une des équations fondamentales de la théorie quand on se donne seulement des conditions initiales (possibilité d'un problème de Cauchy bien défini pour l'équation dont il s'agit). Or, dans un problème de prévision les conditions de Cauchy sont généralemente les seules qui peuvent intervenir. Des conditions aux limites ne peuvent être en général considérées dans ces problèmes, car elles font précisément intervenir, sauf dans quelques cas particulièrement simples (le problème des cordes vibrantes par exemple), la fonction même qu'il s'agit de prévoir.

En ce qui concerne les lignes singulières du champ sur une surface S, il importe surtout d'examiner les conditions de continuité de la fonction U et de ses dérivées premières spatiales et temporelles. Ce sont en effet ces conditions qui décident de la possibilité d'appliquer les formules fondamentales de transformation des intégrales de volumes et de surfaces en intégrales de surfaces et de lignes, formules qui sont indispensables dans notre théorie, du moins sous sa forme actuelle.

En tenant compte des remarques précédentes, on voit qu'on peut résumer par le tableau suivant la classification des évolutions possibles d'une grandeur U sur une surface S du champ:

- 1 — U finie et continue
  - A — $\frac{\partial U}{\partial x_k}$ finie et continue
    - α — U holomorphe.
    - β — U régulière jusquà l'ordre p des dérivées $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$. Pas de création de nouvelles discontinuités de $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ $(n > p)$.
    - γ — Pas de création de nouvelles discontinuités de $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ $(n \geq 2)$.
    - δ — Création de nouvelles discontinuités de $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ $(n \geq 2)$.
  - B — $\frac{\partial U}{\partial x_k}$ discontinue
    - α — Pas de création de nouvelles discontinuités de $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ $(n \geq 1)$.
    - β — Création de nouvelles discontinuités de $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ $(n \geq 1)$.
- 2 — U discontinue
  - A — Pas de création de nouvelles discontinuités de U ou de $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ $(n \geq 1)$.
  - B — Création de nouvelles discontinuités de U ou de $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ $(n \geq 1)$.

N. B. — Ce tableau est établi au point de vue analytique, sans chercher à savoir si, dans les phénomènes purement physiques, il est possible d'avoir une discontinuité de $\frac{\partial^n U}{\partial x_k^n}$ $(n \geq 2)$ non acompagnée d'une discontinuité de U ou, du moins, de $\frac{\partial U}{\partial x_k}$.

Dans le présent mémoire nous étudions seulement les trois premiers cas: 1 A α, 1 A β et 1 A γ. Remarquons qu'un phénomène qu'on doit considérer comme discontinu à une certaine échelle (d'espace et de temps) des observations [1], c'est-à-dire qui ne peut être représenté, à cette échelle, par une fonction continue de l'espace et du temps, cesse souvent d'être discontinu quand on l'observe à une autre échelle (plus grande ou plus petite, suivant le cas) pour laquelle le champ présente des «zones de transition» plus ou moins rapide à la place des discontinuités. On peut donc ramener parfois l'étude d'une certaine évolution discontinue à l'étude des deux premiers cas du tableau: 1 A α et 1 A β. Il ne faut cependant pas oublier que le choix de l'échelle des observations n'est pas toujours arbitraire, car un changement de cette échelle peut faire qu'on observe un nouveau phénomène ne présentant plus les mêmes «caractères physiques» que le phénomène dont on désire prévoir l'évolution. Sans parler de l'existence de «seuils» inférieurs de validité pour la plupart des grandeurs de la «physique macroscopique» (le seuil de validité est l'échelle d'espace et de temps au dessous de laquelle une certaine grandeur n'est plus bien définie [2]), on peut dire que des observations de la même grandeur, effectuées à des échelles différentes, ne sont pas toujours comparables au point de vue de la «nature physique» des phénomènes qu'on désire étudier. Si, par exemple, on étudie les mouvements vibratoires d'un milieu élastique à l'échelle des phénomènes «sonores», on ne peut pas étudier les mouvements du milieu à une échelle arbitraire plus grande sans faire perdre aux «observations» des mêmes grandeurs (densité, pression, vitesse, etc.) le caractère ou la «nature» de phénomène «sonore». On pourrait en dire autant des phénomènes de rayonnement en général s'il était possible d'observer directement l'évolution des champs électromagnétiques qui leur correspondent. Ainsi, il n'est pas toujours possible de ramener l'étude de l'évolution d'un champ quelconque à l'étude des trois premiers cas du tableau. Mais, indépendamment du fait que de nombreux et importants phénomènes satisfont aux conditions qui caractérisent ces trois cas, leur étude est indispensable pour pouvoir entreprendre la théorie de l'évolution avec création de nouvelles discontinuités.

2 — *Bases de la théorie* — a) — Soit U (x, y, z, t) la fonction de l'espace et du temps dont il s'agit de prévoir l'évolution et D le domaine de définition (d'étendue quelconque) de cette fonction. Admettons que U (x, y, z, t) est une fonction continue ayant des dérivées partielles du premier ordre continues et des dérivées secondes intégrables. Considérons dans le domaine D

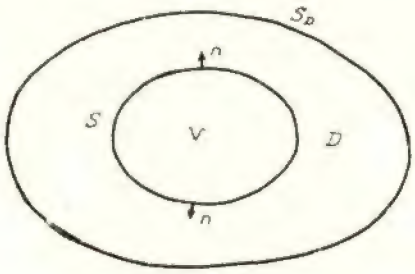


Fig. 2

un volume V quelconque (pouvant être le volume D) limité por une surface fermée S (fig. 2). En chaque point A (u, v) de la surface S la fonction U est bien définie à chaque instant, de même que sa dérivée première $\frac{\partial U}{\partial n}$ prise suivant les normales n à la surface S. Nous allons établir la proposition suivante:

---

[1] — Au sujet de l'importance de la notion d'échelle dans toute theorie de l'évolution, voir l'ouvrage cité.

[2] — Sur la notion de seuil de validité, sans laquelle on ne peut comprendre certaines propriétés générales des phénomènes, voir op. cit.

Il existe dans V *une fonction satisfaisant à l'équation des ondes, prenant sur* S *à tout instant les valeurs de* U *et dont la dérivée normale s'annule en chaque point de* S.

Soit $\varphi(x, y, z, t)$ une fonction satisfaisant ou non à l'équation des ondes. Supposons que cette fonction est continue, que ses dérivées partielles du premier ordre sont continues, que ses dérivées secondes sont intégrables dans le volume V. Supposons de plus que $\varphi(x, y, z, t)$ prend sur S à chaque intant les valeurs de U et que sa dérivée normale est nulle. On a donc les deux conditions aux limites suivantes pour φ:

$$\text{(1)} \qquad \text{sur S:} \quad \varphi = U \; ; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

Considérons l'intégrale triple essentiellement positive étendue au volume V:

$$\text{(2)} \qquad I = \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz,$$

c étant une constante.

Il y a évidemment une infinité de fonctions φ satisfaisant aux conditions définies ci-dessus. Nous admettons alors — et ceci est l'hypothèse fondamentale — que dans l'infinité de fonctions φ qu'on vient de définir il y en a au moins une (Ψ) qui rend l'intégrale I minimum à tout instant. S'il en est ainsi l'intégrale:

$$\text{(3)} \qquad J = \int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)^2 \right] dx\, dy\, dz\, dt,$$

sera aussi minimum, les limites t_1 et t_2 étant quelconques. Formons donc la variation première de cette dernière intégrale. Il vient:

$$\text{(4)} \qquad \frac{1}{2}\,\delta J = \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S \delta\Psi \frac{\partial \Psi}{\partial n}\, d + - \int_{t_1}^{t_2} ds \iiint_V \delta\Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) dx\, dy\, dz +$$

$$+ \iiint_V \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\,\delta\Psi\right)_{t_2} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t}\,\delta\Psi\right)_{t_1} \right] dx\, dy\, dz = 0\,.$$

La première intégrale, étendue à la surface S du volume V, s'annule par suite de la deuxième des conditions (1) auxquelles Ψ satisfait. Quant à la troisième intégrale de (4), on peut toujours la poser égale à zéro, car la fonction Ψ, rendant l'intégrale (2) minimum à tout instant t, rendra aussi minimum l'intégrale (3) quelle que soit la variation $\delta\Psi$ donnée à la fonction aux limites arbitraire de l'intervalle de temps $t_1 \to t_2$.

On peut donc calculer le minimum en admettant que $\delta\Psi = 0$ en chaque point de V pour $t = t_1$ et $t = t_2$. Nous avons alors:

$$\int_{t_1}^{t_2} \iiint_V \delta\Psi \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \right) dx\, dy\, dz\, dt = 0\,.$$

Or, $\delta\Psi$ étant arbitraire entre les limites t_1 et t_2, l'intégrale précédente ne peut s'annuler que si l'on a en chaque point de V et a tout instant:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right), \tag{5}$$

ou bien, en désignant par Δ l'opérateur laplacien:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \Delta \Psi . \tag{6}$$

Cette équation n'est autre que l'équation des ondes dans l'espace tridimensionnel euclidien. La proposition est donc démontrée.

Il est nécessaire d'insister sur l'hypothèse qui permet d'arriver à ce résultat: existence, parmi les fonctions φ en nombre infini, d'au moins une fonction Ψ rendant les intégrales (2) ou (3) minimum. L'existence de cette fonction Ψ est très vraisemblable a priori, mais nullement évidente. On peut seulement affirmer a priori que l'intégrale (2) a une limite dont on peut se rapprocher autant qu'on veut par un choix convenable de la fonction φ, sans que l'on puisse dire que cette limite est effectivement atteinte pour une certaine fonction φ. Notre hypothèse donne prise aux critiques qui ont été élevées contre la démonstration par laquelle Dirichlet et Riemann ont établi le principe de Dirichlet sur l'existence d'une fonction harmonique ($\Delta\varphi = 0$) dans un volume, prenant sur la surface du volume des valeurs données se succédant d'une manière continue. On possède des méthodes rigoureuses de démonstration du principe de Dirichlet et, s'inspirant de ces méthodes, il ne serait pas impossible de donner dans notre cas un raisonnement sur l'existence de la fonction Ψ pouvant échapper aux objections que soulève l'hypothèse de l'existence a priori du minimum de (2) ou (3). Cela nous entraînerait dans des développements mathématiques que nous voulons éviter dans ce mémoire. Nous nous bornerons à ajouter que des considérations physiques simples — considérations qui sont toujours un guide sûr pour savoir si un problème analytique est bien posé — montrent que la fonctiod Ψ existe.

Dans le cas du principe de Dirichlet, on peut invoquer la conduction de la chaleur pour prouver que la fonction harmonique existe. Si en effet on assujetti chaque point de la surface S d'un corps conducteur homogène à avoir une température (ϑ) constante dans le temps mais variant d'un point à l'autre de S d'une façon continue, il s'établira a l'intérieur du corps, un équilibre thermique qui, d'après l'équation classique de Fourier $\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} = \alpha^2 \triangle \vartheta\right)$ satisfait à l'équation des fonctions harmoniques ($\triangle \vartheta = 0$). Dans notre cas, nous pouvons invoquer les petits mouvements des fluides parfaits élastiques. Soit Φ le potentiel des vitesses d'un tel mouvement, c'est-à-dire la fonction liée aux composantes v_x, v_y et v_z de la vitesse en un point par les relations:

$$v_x = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad v_y = -\frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad v_z = -\frac{\partial \Phi}{\partial z},$$

et soit c la vitesse constante du «son» donnée par les propriétés élastiques du milieu. Dans tous les traités d'hydrodynamique, on montre que si l'on pose pour la fonction densité (ε) du milieu une expression de la forme $\varepsilon = \varepsilon_0 (1 + q)$ (ε_0 étant la densité d'équibre et q le facteur de condensation dû au petit mouvement), on a la formule:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = c^2 q , \tag{7}$$

d'où en intégrant:

$$\Phi (x, y, z, t) = c^2 \int_{t_0}^{t} q (x, y, z, t)\, dt + \Phi (x, y, z, t_0) .$$

Ces relations montrent qu'il suffit d'astreindre la densité (ou la pression, car on a $p = p_0 + k q$) à la surface du fluide élastique à varier suivant une loi donnée, pour avoir sur cette

surface un potentiel des vitesses variant suivant une loi telle que ses dérivées par rapport au temps d'ordre quelconque prennent des valeurs données à l'avance se succédant d'une façon continue sur la surface S. On arrive ainsi à l'important résultat suivant:

Etant donnée la fonction U (x, y, z, t) à prévoir qui prend en un point quelconque A d'une surface S des valeurs données par la fonction U (A, t), on peut toujours faire en sorte que ces valeurs soient identiques (ou plus généralement proportionnelles) en chaque point de S et à tout instant, par exemple à la dérivée première par rapport au temps du potentiel des vitesses d'un certain petit mouvement bien défini d'un fluide élastique enfermé dans S. On peut donc toujours écrire:

$$\text{(7 bis)} \qquad U(A, t) = \frac{1}{a}\frac{\partial \Phi}{\partial t}(A, t)$$

a étant une constante pouvant être infiniment petite [1].

De plus, il est toujours permis de supposer que le fluide est enfermé dans une paroi immobile, c'est-à-dire que S est immobile. La vitesse $\vec{v}$ est alors tangente à S ce qui donne la condition suivante en chaque point de S: $v_n = -\frac{\partial \Phi}{\partial n} = 0$ ou $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0$. On voit alors que $\frac{\partial \Phi}{\partial t}\frac{1}{a}$ est une fonction qui satisfait aux conditions aux limites (1):

$$\text{(8)} \qquad \text{sur S:} \qquad \frac{1}{a}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = U \quad , \quad \frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right) = 0 .$$

Or, le potentiel des vitesses d'un petit mouvement d'un fluide élastique, de même que ses dérivées partielles d'ordre quelconque, satisfont à l'équation (6) à laquelle doit satisfaire aussi la fonction Ψ. Il suffit donc de poser identiquement

$$\text{(9)} \qquad \Psi(x, y, z, t) = \frac{1}{a}\frac{\partial \Phi}{\partial t}(x, y, z, t) ,$$

pour avoir une fonction satisfaisant à toutes les conditions requises pour la fonction Ψ. Nous avons ainsi démontré l'existence de cette fonction, qui rend minimum l'intégrale (2) ou l'intégrale (3). De plus, le raisonnement précédent montre aussi qu'à une certaine distribution de U sur S correspond une seule fonction Ψ.

b) — Ayant montré qu'il existe dans tous les cas une fonction Ψ satisfaisant aux conditions indiquées, il s'agit maintenant de la déterminer à l'intérieur du volume V en partant des valeurs de U sur la surface S. Nous utilisons pour cela le théorème classique de Kirchhoff sur l'équation des ondes, théorème qui est une généralisation de la formule de Green sur les fonctions harmoniques et qui s'exprime par la formule suivante («potentiels retardés»):

$$\text{(10)} \qquad \Psi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \left(\Psi\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r}\frac{\partial \Psi}{\partial n} - \frac{1}{cr}\frac{\partial \Psi}{\partial t}\frac{\partial r}{\partial n}\right)_{t-\frac{r}{c}} ds ,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface S dont l'élément différentiel est dS et n les normales extérieures. Dans la formule précédente r désigne la distance d'un point x, y, z quelconque où l'on veut déterminer Ψ à un point A de la surface S. L'indice $t - \frac{r}{c}$ indique (et c'est là l'ori-

---

[1] — Voir les remarques fondamentales du § 4 qui précisent ce résultat.

gine de l'appellation «potentiel retardé») qu'en un point A de S, situé à la distance r du point x, y, z, il faut prendre les valeurs de Ψ, $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ à un moment antérieur $\frac{r}{c}$ à l'instant t pour lequel on veut déterminer Ψ.

Par suite des conditions (1), on peut écrire ici:

$$\Psi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{t-\frac{r}{c}} ds . \tag{11}$$

Etant un «potentiel retardé», l'expression (11) semble à première vue convenir à la prévision de l'évolution de Ψ (donc aussi de U, puisque, sur S, on a $\Psi \equiv U$). Mais il n'en est rien. La prévision de Ψ est la prédétermination des valeurs de cette fonction en un point x, y, z quand on connaît seulement ses valeurs, ainsi que celles de sa dérivée première, en chaque point de V (et de S) à l'instant initial $t = t_o$, et pour tout instant du passé $t < t_o$. Pour faire la prévision des valeurs de Ψ en un point x, y, z par (11) à l'instant t il faut donc que l'on ait en chaque point de S :

$$t - \frac{r}{c} \leq t_o . \tag{12}$$

L'échéance maxima possible de la prévision est donnée par le rapport $\frac{r}{c}$ et tend vers zéro quand le point x, y, z se rapproche de la surface S. Sur cette surface même, la formule (11) ne permet aucune prévision de quelque échéance que ce soit. Or, c'est uniquement cette prévision de Ψ sur la surface S qui nous intéresse, car c'est en réalité la fonction U que nous voulons prévoir et la condition $\Psi = U$ n'est vérifiée que sur S. On voit alors que la formule (11) n'est pas une formule de prévision. Mais elle est tout de même indispensable pour la prévision, en permettant la détermination des conditions initiales $\Psi(x, y, z, t_o)$ et $\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, y, z, t_o)$ de la fonction Ψ à partir des valeurs actuelles et passées de U sur S, conditions qu'aucune autre formule ne peut donner. Pour $\Psi(x, y, z, t_o)$ on a:

$$\Psi(x, y, z, t_o) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{t_o - \frac{r}{c}} ds . \tag{13}$$

Quant au $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ initial, on le détermine soit directement par la formule:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, y, z, t_o) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(\frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{t_o - \frac{r}{c}} ds , \tag{14}$$

car $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ satisfait évidemment à l'équation des ondes, soit indirectement par (11). Grâce à la connaissance de l'évolution passée de U sur S, (11) permet de déterminer en chaque point x, y, z un fragment du passé de Ψ contigu à t_o, d'où l'on déduit le $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ initial. Ce procédé indirect a l'avantage d'éviter la détermination de $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$, toujours moins précise que la détermination de la dérivée première $\frac{\partial U}{\partial t}$.

c) — Nous arrivons maintenant à la prévision de Ψ et spécialement à la prévision de cette fonction sur la surface S. Nous allons démontrer la proposition suivante:

L'évolution de la fonction Ψ (x, y, z, t) sur S satisfait à une équation aux dérivées partielles du second ordre, linéaire, hyperbolique, homogène et à trois variables indépendantes.

Partons de l'équation des ondes:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \triangle \Psi . \tag{15}$$

Considérons un point quelconque A sur S. Considérons (fig. 3) des coordonnées polaires

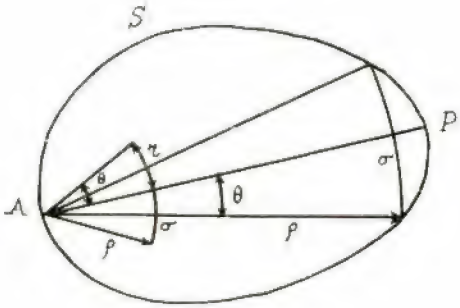


Fig. 3

autour de A comme centre et prenons comme axe des pôles la normale A P à S en A. Adoptons les notations suivantes:

ρ: distance au centre, c'est-à-dire au point A;
θ: angle polaire;
φ: longitude;
n: normale à une surface ou à une ligne;
σ: surfaces des calottes sphériques définies, à l'intérieur du volume V, par les intersections des cônes d'ouverture Ω e de sommet A avec les surfaces sphériques de rayon ρ;
l: contours circulaires de σ;
$\overline{\Psi}$ (σ): moyenne de la fonction Ψ sur σ;
$\overline{\Psi}$ (l): moyenne de la fonction Ψ sur l;
r: longuer de l'arc de grand cercle compris entre le centre et le contour de σ.

Soit, en coordonnés polaires, l'expression du laplacien

$$\triangle \Psi = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) \right\} , \tag{16}$$

qu'on décompose en deux parties:

$$\triangle \Psi = \triangle_2 \Psi + \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) . \tag{17}$$

$\triangle_2$ est l'opérateur laplacien bidimensionnel qui, pour une surface sphérique, peut s'écrire:

$$\triangle_2 = \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right\} = \frac{\partial^2}{\partial r_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial r_2^2} \tag{18}$$

r_1 et r_2 étant des longueurs mesurées sur deux grands cercles orthogonaux passant par un point donné.

De (17) on tire:

$$\iint_\sigma \triangle \Psi \, d\sigma = \iint_\sigma \triangle_2 \Psi \, d\sigma + \iint_\sigma \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) d\sigma \, . \tag{19}$$

Par suite de la définition:

$$\overline{\Psi}(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \iint_\sigma \Psi \, d\sigma \, , \tag{20}$$

et de la relation:

$$\frac{1}{\sigma} \iint_\sigma \frac{\partial^n \Psi}{\partial \rho^n} \, d\sigma = \frac{\partial^n \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho^n} \tag{21}$$

valable pour les surface σ, la dernière intégrale de (19) peut s'écrire comme suit:

$$\iint_\sigma \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) d\sigma = \sigma \frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho^2} + \sigma \frac{2}{\rho} \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho} \, . \tag{22}$$

Transformons maintenant la deuxième intégrale de (19). La formule de Gauss, pour un espace quelconque dont la métrique est définie par

$$d s^2 = \Sigma \, g_{ik} \, d x_i \, d x_k \tag{23}$$

s'écrit en notation tensorielle:

$$\iint \overset{p}{\cdots\cdots} \int \frac{1}{\sqrt{g}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} \, u^k \right) d v = \iint \overset{p-1}{\cdots\cdots} \int u_n \, d s \, , \tag{24}$$

g étant le déterminant des coefficients g_{ik} de la forme métrique (23). Appliquons la formule (24) à une surface sphérique. L'intégrale du premier membre devient une intégrale de surface, que nous étendrons à la surface σ définie plus haut. L'intégrale du second membre devient une intégrale de ligne, que nous prendrons le long du contour l (circulaire) de σ. Il vient donc, en tenant compte des valeurs des g_{ik} pour une surface sphérique:

$$\iint_\sigma \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \, u^\theta \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \, u^\varphi \right) \right\} d\sigma = \int_l u_n \, d l$$

Posons $u = \nabla \Psi$, ∇ étant l'opérateur gradient. On obtient alors

$$\iint_\sigma \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \right) \right\} d\sigma = \iint_\sigma \triangle_2 \Psi \, d\sigma = \int_l \frac{\partial \Psi}{d n} \, d l \, , \tag{25}$$

ou bien, puisque les normales n se confondent ici avec r:

$$\iint_\sigma \triangle_2 \Psi \, d\sigma = \int_l \frac{\partial \Psi}{\partial r} \, d l \, ,$$

ce qui peut s'écrire encore sous la forme:

$$\iint_{\sigma} \triangle_2 \Psi \, d\sigma = l \frac{\partial \Psi(l)}{\partial r} . \tag{26}$$

Mais on a l'identité:

$$\frac{\partial}{\partial r} \iint_{\sigma} \Psi \, d\sigma = \int_{l} \Psi \, dl = l \, \Psi(l) , \tag{27}$$

d'où l'on tire:

$$l \frac{\partial \overline{\Psi}(l)}{\partial r} = l \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial r} [\sigma \overline{\Psi}(\sigma)] \right\} .$$

L'équation (15) donne alors:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iint_{\sigma} \Psi \, d\sigma = c^2 \sigma \frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho^2} + c^2 \sigma \frac{2}{\rho} \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho} + c^2 l \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial r} [\sigma \overline{\Psi}(\sigma)] \right\} .$$

Par suite de la relation $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta}$, l'équation précédente devient:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho} \right] + c^2 \frac{l}{\sigma \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{l \rho} \frac{\partial}{\partial \theta} [\sigma \overline{\Psi}(\sigma)] \right\} . \tag{28}$$

En tenant compte des relations $\sigma = 2\pi\rho^2 (1 - \cos\theta)$ et $l = 2\pi\rho \sin\theta$, on obtient finalement:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho} \right] \frac{c^2}{\rho^2} \left\{ \frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \theta^2} + \left(\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta} \right) \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \theta} \right\} . \tag{29}$$

Cette équation fondamentale démontre la proposition annoncée, car de sa solution $\overline{\Psi}(\sigma) = f(\rho, \theta, t)$ on déduit imédiatement la fonction $\Psi(A, t)$ pour un point A quelconque de la surface S.

Comme le domaine de définition de la fonction Ψ est borné par la surface S, ρ ne pent varier que dans l'intervalle $0 - \rho_m$, ρ_m étant la distance d'un point A de S au point «opposé» de la même surface, mesurée sur l'axe des pôles. Pour chaque valeur de ρ il existe aussi une valeur maxima de θ et nous écrirons $\theta_m = \theta_m(\rho, A)$. θ_m est donc la valeur de θ pour laquelle les surfaces σ touchent S. Cette fonction $\theta_m(\rho, A)$ est en somme l'équation de S en coordonnées polaires, et θ_m varie de $\theta_m = \frac{\pi}{2}$ pour $\rho = 0$ à $\theta_m = 0$ pour $\rho = \rho_m$.

Nous verrons plus loin qu'il est possible de trouver la solution du problème de Cauchy relatif à l'équation (29), et que cette solution est une formule générale de prévision permettant de prédéterminer l'évolution de Ψ pendant un intervalle de temps τ_m de durée finie telle que $\tau_m \leq \frac{\rho_m}{c}$. Cela suffit pour pouvoir prédéterminer l évolution de Ψ en un point A de S *pendant un avenir de durée quelconque.* Il suffit, en effet, de faire des applications successives de la solution de (29). La première de ces applications donnera, comme nous le verrons, la valeur de Ψ pendant un intervalle de temps $\tau_m \leq \frac{\rho_m}{c}$ (τ_m est donc l'échéance maxima de la prévision élémentaire qui est compatible avec une position donnée du point A sur une surface S de forme donnée). Pour $t = t_0 + \tau_m$ on aura donc des valeurs $\Psi(A, t)$ sur S, et l'intégrale de surface de Kirchhoff donne alors les valeurs de Ψ et de $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ à l'intérieur du volume V

pour $t \leq t_0 + \tau_m$. Une deuxième application de la solution de (29) permettra de trouver, avec ces deuxièmes «conditions initiales», les valeurs de Ψ sur S pour $t = t_0 + 2\tau_m$, époque pour laquelle la formule de Kirchhoff déterminera dans tout le volume V les troisièmes «conditions initiales» (pour $t = t_0 + 2\tau_m$). On fera alors une troisième application de la solution de (29), et ainsi de suite.

Cas particulier important — L'équation (29) est valable pour n'importe quelle forme de la surface S , et pour n'importe quelle fonction continue Ψ satisfaisant en chaque point de S à l'équation des ondes, quelle que soit la valeur de la dérivée normale $\frac{\partial \Psi}{\partial n}$ sur S . Nous allons maintenant considérer un cas particulier important, en supposant que S comporte une partie plane et que la fonction qui satisfait à l'équation des ondes satisfait aussi à la deuxième condition (1): $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ sur S .

En un point A de la partie plane de S , considérons (fig. 4) les surfaces σ pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, qui sont donc des hémisphères. L'équation (29) devient:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho} \right] + \frac{c^2}{\rho^2} \left[\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \theta} \right]_{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

De la relation (27) on déduit:

$$\frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial r} = \frac{l}{\sigma} \left[\overline{\Psi}(l) - \overline{\Psi}(\sigma) \right], \tag{30}$$

d'où l'on tire:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial r^2} = \frac{l}{\sigma} \left[\frac{\partial \overline{\Psi}(l)}{\partial r} - \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial r} \right] + \left[\overline{\Psi}(l) - \overline{\Psi}(\sigma) \right] \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{l}{\sigma} \right) .$$

Calculons cette dérivée pour $\theta = \frac{\pi}{2}$. On a alors: $\frac{\partial l}{\partial r} = 0$, $l = 2\pi\rho$, $\sigma = 2\pi\rho^2$ et il vient:

$$\rho \frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial r^2} = -\frac{1}{\rho} \left[\overline{\Psi}(l) - \overline{\Psi}(\sigma) \right] - \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial r} + \frac{\partial \overline{\Psi}(l)}{\partial r} .$$

En comparant avec (30):

$$\left(\rho \frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial r} \right)_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \frac{\partial \overline{\Psi}(l)}{\partial r} ,$$

ou bien:

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \theta} \right)_{\theta = \frac{\pi}{2}} = \frac{\partial \overline{\Psi}(l)}{\partial \theta} .$$

Mais si la fonction Ψ satisfait à la condition $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ sur S , on aura pour $\theta = \frac{\pi}{2}$: $\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial r} = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ en chaque point de S , donc aussi $\frac{\partial \overline{\Psi}(l)}{\partial \theta} = 0$. Dans ces conditions, on peut écrire:

$$\left(\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \theta^2} + 2 \frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \theta} \right)_{\theta = \frac{\pi}{2}} = 0 ,$$

et l'équaton générale (29) se réduit à:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho} \frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho} \right),$$

ou bien:

$$\frac{\partial^2 [\rho \overline{\Psi}(\sigma)]}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 [\rho \overline{\Psi}(\sigma)]}{\partial \rho^2}. \tag{31}$$

Montrons maintenant qu'on peut arriver au même résultat par une autre voie. Considérons,

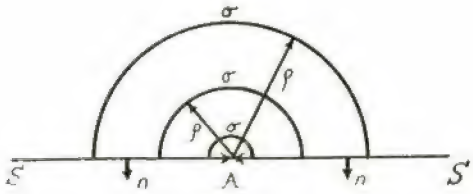


Fig. 4

pour une valeur quelconque de ρ le volume ν limité d'une part par σ (qui est ici un hémisphère) et d'autre part par S (fig. 4). On a, en partant de (15) et en appliquant la formule de Gauss au volume ν:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{\nu} \Psi \, d\nu = c^2 \iint_{\sigma+s} \frac{\partial \Psi}{\partial n} \, ds.$$

L'intégrale de surface se décompose en une intégrale sur σ et une autre intégrale sur S. Cette dernière s'annule par suite de la condition $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$. En remarquant que pour la première intégrale de surface la normale se confond avec ρ, on peut écrire:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{\nu} \Psi \, d\nu = c^2 \iint_{\sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \, d\sigma.$$

Désignons par $d\Omega$ l'angle solide infinitésimal dont le sommet est A et qui découpe sur σ l'élément $d\sigma$. On a $d\sigma = \rho^2 \, d\Omega$; $d\nu = \rho^2 \, d\rho \, d\Omega$ et il vient:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{\nu} \Psi \rho^2 \, d\rho \, d\Omega = c^2 \rho^2 \int \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \, \partial \Omega \tag{32}$$

Sur les contours circulaires l les surfaces σ sont normales à S. La relation:

$$\frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \, d\sigma = \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho}$$

est donc valable et (32) devient:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \iiint_{\nu} \Psi \rho^2 \, d\rho \, d\Omega = c^2 \rho^2 \Omega \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho}.$$

Or:

$$\iiint_{\nu} \Psi \rho^2 d\rho \, d\Omega = \int_0^{\rho} \rho^2 d\rho \int \Psi \, d\Omega = \int_0^{\rho} \rho^2 \Omega \overline{\Psi}(\sigma) \, d\rho ,$$

donc:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^{\rho} \Omega \overline{\Psi}(\sigma) \rho^2 d\rho = c^2 \rho^2 \Omega \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho} .$$

En dérivant les deux membres par rapport à ρ et en tenant compte de la relation $\sigma = \Omega \rho^2$ on obtient:

$$\frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho^2} + c^2 \frac{d \log \sigma}{\partial \rho} \frac{\partial \overline{\Psi}(\sigma)}{\partial \rho} .$$

Finalement, en introduisant la relation $\sigma = 2 \pi \rho^2$, caractèristique des hémisphères, il vient:

$$\frac{\partial^2 [\rho \overline{\Psi}(\sigma)]}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 [\rho \overline{\Psi}(\sigma)]}{\partial \rho^2}$$

On retrouve donc bien l'équation (31).

Cette équation (31) admet comme solution générale:

$$[\overline{\Psi}(\sigma)] (\rho, t) = \frac{1}{\rho} [f(\rho - ct) + g(\rho + ct)]$$

De cette intégrale on tire, par un calcul classique que je passe sous silence, la valeur de $\overline{\Psi}(\sigma)$ pour $\rho = 0$, c'est-à-dire la valeur même de Ψ en point A du plan:

$$\Psi(A, t) = t [\overline{\mu}_o(\sigma)]_{\rho = ct} + \left\{ \frac{d}{dt} [t \overline{\Psi}_o(\sigma)] \right\}_{\rho = ct} , \tag{33}$$

dans laquelle $\overline{\Psi}_o(\sigma)$ désigne la moyenne de la valeur initiale de Ψ sur la surface σ de rayon $\rho = ct$ et $\overline{\mu}_o(\sigma)$ la moyenne de la valeur initiale de $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ sur la même surface:

$$\overline{\mu}_o(\sigma) = \frac{1}{\sigma} \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial t} \right)_{t=0} d\sigma$$

La formule (33) est identique à la célèbre formule de Poisson qui représente l'intégrale générale de l'équation des ondes et qui permet de prévoir la fonction inconnue, *à l'intérieur* d'un volume V, pendant un intervalle de temps τ_m après l'instant initial tel que $\tau_m \leq \frac{\rho_m}{c}$, ρ_m étant ici le rayon pour lequel les sphéres qu'on trace autour d'un point comme centre touchent déjà la frontière du volume (frontière du domaine de définition de la fonction Ψ), La formule de Poisson ne nous fournit donc aucune indication sur l'évolution en un point de cette frontière; comme la formule de Kirchhoff, elle n'est pas, sur S, une formule de prévision. Mais on voit maintenant que s'il s'agit d'une fonction Ψ qui satisfait à l'équation des ondes et qui a une dérivée normale nulle sur la frontière, la formule de Poisson est encore applicable sur toute partie plane de la frontière (l'échéance τ_m de la prévision étant donné par le rapport $\frac{\rho_m}{c}$, si ρ_m désigne le rayon pour lequel les surfaces σ touchent déjà la partie courbe de S).

Il pourrait sembler, à première vue, que ce résultat suffit pour prévoir Ψ dans tous les cas, car la surface S a une forme arbitraire. Il n'en est rien, car il est souvent impossible de déterminer les conditions initiales d'une fonction, satisfaisant aux mêmes conditions aux limites que notre fonction Ψ, sur un plan passant par le point A où l'on désire faire la prévision. D'ailleurs, les données initiales ne sont souvent connues que sur une surface S ne comprenant pas de parties planes, ainsi que nous le verrons dans l'application à l'atmosphère. Il faut donc trouver la solution de l'équation fondamentale (29) lorsque S est une surface régulière de forme quelconque.

Remarque — Pour arriver à l'équation (29) nous avons considéré des coordonnées polaires dont l'axe des pôles est normal en un point donné A à la surface S. Il n'y a aucune raison pour choisir a priori une telle orientation de l'axe des pôles et on serait arrivé, par le même calcul, à une équation identique à (29) en prenant un axe des pôles orienté d'une autre façon. Cependant l'orientation normale se justifie a posteriori car c'est la seule qui permet de retrouver la formule de Poisson lorsque la surface S comporte une partie plane. Ceci entraîne d'ailleurs des simplifications dans l'expression de la solution générale de (29), comme nous le verrons.

d) Solution de l'équation (29) — Commençons par metre cette équation sous une forme légèrement différente. Posons :

$$M = \rho\, \overline{\Psi}(\sigma)$$

Il vient :

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \rho^2} + \frac{c^2}{\rho^2}\left[\frac{\partial^2 M}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right)\frac{\partial M}{\partial \theta}\right] \tag{29 bis}$$

Faisons le changement de variables :

$$\lambda = \rho - ct \quad ; \quad \eta = \rho + ct \tag{34}$$

et posons :

$$A = \frac{1}{4\rho^2} \quad ; \quad B = A\left(\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} + \frac{1}{\sin\theta}\right).$$

L'équation (29 bis) prend la forme

$$\frac{\partial^2 M}{\partial\lambda\,\partial\eta} + A\frac{\partial^2 M}{\partial\theta^2} + B\frac{\partial M}{\partial\theta} = 0. \tag{35}$$

Nous allons chercher la solution de cette équation aux dérivées partielles. Considérons le polynôme adjoint de (35) :

$$g(w) = \frac{\partial^2 w}{\partial\lambda\,\partial\eta} + A\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2} - \frac{\partial(Bw)}{\partial\theta} \tag{36}$$

Désignons par $f(M)$ le polynôme différentiel (35). Définissons un vecteur $\vec{R}(\lambda, \eta, \theta)$ de l'espace euclidien des λ, η, θ par les valeurs suivantes de ses composantes :

$$\left\{\begin{aligned} R_\lambda &= \frac{1}{2}\, w\left(\frac{\partial M}{\partial\eta} - M\frac{\partial w}{\partial\eta}\right) \\ R_\eta &= \frac{1}{2}\, w\left(\frac{\partial M}{\partial\lambda} - M\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right) \\ R_\theta &= A\left(w\frac{\partial M}{\partial\theta} - M\frac{\partial w}{\partial\theta}\right) + MBw. \end{aligned}\right. \tag{37}$$

On peut alors écrire l'identité:

$$\text{div}\,\vec{R} = \frac{\partial R_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{\partial R_\eta}{\partial \eta} + \frac{\partial R_\theta}{\partial \theta} = w\,f\,(M) - M\,g\,(w)\ . \tag{38}$$

En prenant pour w une fonction continue qui reste finie pour toute valeur de λ, η, θ et telle que les produits $A\,w$, $B\,w$ et $A\frac{\partial w}{\partial \theta}$ soient toujours finis dans un volume donné, toutes les conditions requises pour appliquer au vecteur $\vec{R}$ la formule de Gauss seront réalisées. On pourra alors écrire:

$$\iiint_{v} [w\,f\,(M) - M\,g\,(w)]\,d\lambda\,d\eta\,d\theta = \iint_{s} R_n\,ds\ , \tag{39}$$

v étant un volume de l'espace des λ, η, θ et s la surface fermée qui limite ce volume.

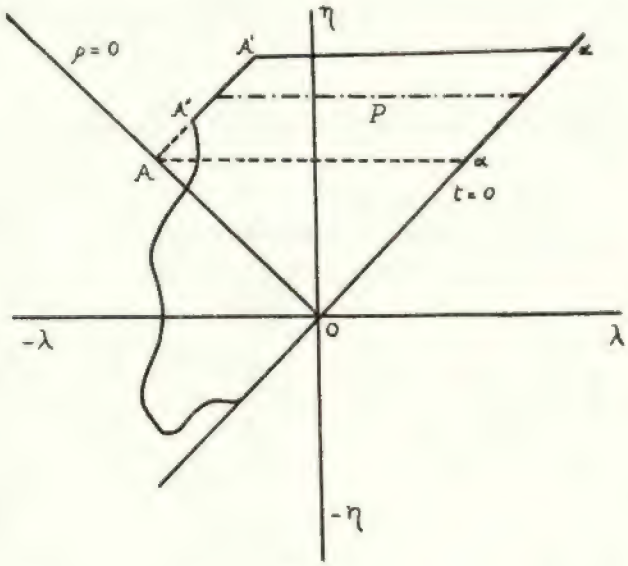


Fig. 5

Considérons (fig. 5) le plan $\theta = 0$ (l'axe des θ étant perpendiculaire au plan de la figure). Comme on a, d'après (34):

$$\rho = \frac{\lambda + \eta}{2} \quad ; \quad t = \frac{\eta - \lambda}{2c}, \tag{40}$$

les données initiales se trouvent sur le plan $\lambda = \eta$, et le point A où l'on veut faire la prévision sur le plan $\lambda = -\eta$ (ou $\rho = 0$) perpendiculaire au plan $\lambda = \eta$. La distance d d'un point de ce dernier plan au premier est $d = ct$. On doit donc placer le point A sur le plan $\rho = 0$ à la distance ct de l'origine, t étant l'époque pour laquelle ou veut faire la prévision, comptée à partir de $t_0 = 0$.

Considérons un volume v de l'espace des λ, η, θ limité par les surface suivantes:

1 — le plan $\eta = \text{Const.}$ passant par la droite $A'\alpha'$.
2 — le plan $t = 0$.
3 — le plan $t = \text{Const.}$ passant par AA'.
4 — une surface de forme arbitraire.
5 — le plan $\theta = 0$.

6 — la surface définie par la fonction $\theta_m = \theta_m(\rho)$, précédemment considérée. Cette fonction est celle qui donne, pour chaque valeur de ρ, la valeur maxima θ_m que peut prendre θ. On a donc : $\theta_m(\rho = 0) = \frac{\pi}{2}$ et $\theta_m(\rho = \rho_m) = 0$.

A l'intérieur de ce volume on peut considérer un plan P parallèle au plan 1 et pouvant être déplacé parallèlement à l'axe $t = 0$. Ce plan mobile limite donc, avec les autres surfaces définies plus haut, une infinité de volumes ν' et l'on peut attacher au déplacement de P un opérateur $\frac{d}{d\rho}$.

Si on choisit pour w une fonction satisfaisant à $g(w) = 0$ dans tout le volume ν et sur sa surface, on pourra écrire pour ce volume, de même que pour chaque volume ν', l'identité de Gauss sous la forme :

$$\iint_{s'} \left[R_\lambda \cos(n,\lambda) + R_\pi \cos(n,\pi) + R_\theta \cos(n,\theta) \right] ds' = 0,$$

puisque pour $g(w) = 0$ la divergence de $\vec{R}$ est identiquement nulle, d'après (38). De même il sera possible d'écrire pour tout volume ν' :

$$\frac{d}{d\rho} \iint_{s'} \left[R_\lambda \cos(n,\lambda) + R_\pi \cos(n,\pi) + R_\theta \cos(n,\theta) \right] ds' = 0 \tag{41}$$

D'après les définitions (37) et en tenant compte de l'orientation des différentes surfaces qui limitent le volume ν', on a :

$$(42) \quad \begin{cases} 1 - \text{sur le plan P :} \\ \qquad R_n = \frac{1}{2} \frac{\partial (M w)}{\partial \lambda} - M \frac{\partial w}{\partial \lambda}. \\ 2 - \text{sur le plan 2 :} \\ \qquad R_n = \frac{1}{2} \left(w \frac{\partial R}{\partial n} - M \frac{\partial w}{\partial n} \right). \\ 3 - \text{sur le plan 3 :} \\ \qquad R_n = \frac{1}{2} \left(w \frac{\partial M}{\partial n} - M \frac{\partial w}{\partial n} \right). \end{cases}$$

D'après la forme de l'équation $g(w) = 0$ on voit que w, ainsi que sa dérivée $\frac{\partial w}{\partial \theta}$, s'annulent sur le plan $\theta = 0$. En plus de cette condition identique, assujettissons w aux conditions :

$$(43) \quad \begin{cases} 1 - \ w = 0 ; \ \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \text{ sur la surface } \theta_n(\rho). \\ 2 - \ \frac{\partial w}{\partial \lambda} = 0 \text{ sur le plan 2}. \\ 3 - \ \frac{\partial}{\partial \rho} \left[\log \left(\frac{\partial w}{\partial \lambda} + M \right) \right] = 0 \text{ sur le plan 1}. \end{cases}$$

(Ces conditions son évidemment compatibles entre elles et avec l'équation $g(w) = 0$).

Calculons alors la valeur de la dérivée (41) lorsque le plan mobile P se confond avec le plan 1, c'est-à-dire lorsque $\nu' = \nu$. En tenant compte des valeurs (42) de R_n ainsi que des conditions (43), il vient, après quelques transformations simples:

$$\int_0^{\theta_m} \left(M \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_{A'} d\theta + \int_0^{\theta_m} \left(w \frac{\partial M}{\partial \rho} \right)_{A'} d\theta = \int_0^{\theta_m} w_{\alpha'} \left(\frac{\partial M}{\partial \rho} - \frac{\partial M}{\partial n} \right)_{\alpha'} d\theta + \int_0^{\theta_m} M_{\alpha'} \left(\frac{\partial w}{\partial \rho} + \frac{\partial w}{\partial n} \right)_{\alpha'} d\theta \, .$$

Faisons maintenant tendre la fonction w vers zéro, en passant naturellement pas des fonctions satisfaisant toujours à $g(w) = 0$, et aux conditions indiquées. La limite de l'équation précédente est:

$$\left[\overline{\Psi}(\tau) \right]_{A'} = \frac{w_{\alpha'}(\theta_m)}{w_{A'}(\theta_m)} \left\{ \frac{\partial M}{\partial \rho} - \frac{\partial M}{\partial n} \right\}_{\alpha, \theta_m} - \frac{1}{w_{A'}(\theta_m)} \left(M \frac{\partial w}{\partial \rho} \right)_{A', \theta_m} - \left[\rho \frac{\partial \overline{\Psi}(\tau)}{\partial \rho} \right]_{A', \theta_m}$$

Or, sur le plan $\rho = 0$ la fonction $\overline{\Psi}(\tau)$ se réduit à la valeur ponctuelle de Ψ, et l'expression précédente, dans laquelle on annule les termes qui contiennent ρ_A en facteur, donne:

$$\Psi(A,t) = \frac{w_\alpha(\theta_m)}{w_A(\theta_m)} \left\{ \frac{\partial [\rho \overline{\Psi}(\tau)}{\partial \rho} - \frac{\partial [\rho \overline{\Psi}(\tau)]}{\partial n} \right\}_{\alpha, \theta_m}$$

Mais la figure 5 montre immédiatement que l'opérateur $\frac{\partial}{\partial_n}$ est équivalent à $-\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_o}$. Comme d'autre part la distance $(c\,t)$ d'un point de $\rho = 0$ à $t = 0$ est égale à la distance de α à l'origine, on peut poser $\rho = c\,t$ et il vient:

$$\Psi(A,t) = G \left\{ t\,\overline{\mu}_o(\tau) + \frac{d}{dt} [\, t\,\overline{\Psi}_o(\tau) \,] \right\}_{\theta_m(c\,t),\, \rho = c\,t} \tag{44}$$

avec:

$$G = \lim_{w \to 0} \frac{w_\alpha(\theta_m)}{w_A(\theta_m)} \, .$$

Telle est la formule qui résoud le problème de Cauchy relatif à l'équation (29). Il s'agit d'une formule de Poisson généralisée. Si, en effet, la surface S comporte une partie plane et si on applique (44) en un point A de cette partie plane, le coefficient G devient égal à l'unité et l'on retrouve la formule de Poisson qui, comme on sait, est valable pour une partie plane de S.

Dans le cas général (surface S régulière de forme quelconque) il n'y a aucune raison a priori pour supposer que le coefficient G ne dépend pas de l'instant initial t_o aussi bien que de la forme de la surface θ_m. La formule (44) *n'est pas alors une formule de prévision,* à cause de la présence de la fonction $G(t_o)$ de forme inconnue. Nous rencontrons ici des circonstances qui sont typiques pour les méthodes de résolution du problème de Cauchy qui prennent leur point de départ dans l'identité de Gauss, et dans lesquelles il faut faire intervenir une fonction auxiliaire w satisfaisant à l'équation adjointe de l'équation proposée. Sauf dans quelques cas exceptionnels, ces méthodes ne conduisent pas à des «formules de prévision», au sens large du mot; elles ne conduisent pas, par exemple pour les équations aux dérivées partielles du second ordre, à la détermination de l'inconnue Ψ pour toute valeur de l'une des variables indépendantes (x_k) supérieure à la valeur «initiale» (x_k^o), en partant seulement des données «initiales» (valeurs de Ψ et de $\frac{\partial \Psi}{\partial x_k}$ sur plan ou l'hyperplan $x_k = 0$). Ces méthodes donnent la solution en un point A en fonction des valeurs de l'inconnue et de sa dérivée normale (ou plus généralement de

l'inconnue et de la fonction auxiliaire) sur une surface (ou hypersurface) sur laquelle x_k prend toutes les valeurs comprises entre x_k^0 et la valeur de x_k au point A. Quand on particularise suffisament, par des conditions aux limites appropriées, la fonction auxiliaire, on peut aussi arriver à des formules ne contenant pas des valeurs de l'inconnue autres que les valeurs initiales, mais où, par contre, la fonction auxiliaire dépend de la valeur de l'inconnue ailleurs que sur $x_k = 0$.

Dans notre problème, nous pouvons heureusement transformer la solution et obtenir une véritable formule de prévision. Nous allons utiliser pour cela une importante propriété générale des fonctions qui satisfont à l'équation des ondes. Considérons (fig. 6) le volume V limité par

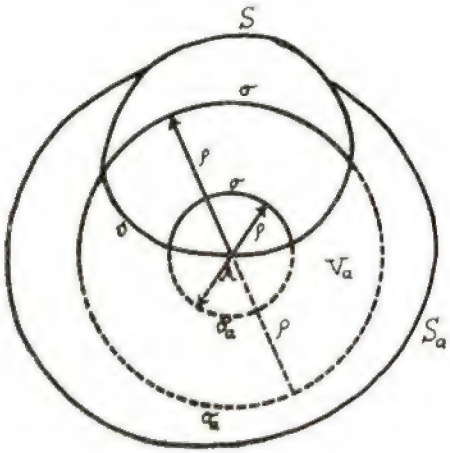


Fig. 6

la surface régulière S au point A de laquelle on désire faire la prévision de Ψ. A l'extérieur de V prenons une autre surface régulière S_a qui limite, avec une partie s de S, un volume V_a. Grâce aux résultats du § 1, on peut affirmer qu'il existe une fonction Ψ_a satisfaisant à l'équation des ondes dans tout le volume V_a et sur sa surface, de même qu'aux conditions suivantes:

$$\Psi_a = \Psi\,(A, t)\,; \quad \frac{\partial \Psi_a}{\partial n} = 0 \text{ en chaque point de } s \text{ et de } S_a\,. \quad (45)$$ [1]

Cette fonction est donc déterminée, jusqu'à l'instant initial, par l'intégrale de surface de Kirchhoff qui peut s'écrire ici comme suit:

$$\Psi_a\,(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_{s+S_a} \left(\Psi\,(A, t)\, \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial \Psi\,(A, t)}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{t - \frac{r}{c}} ds\,. \quad (46)$$

(En effet, jusqu'à l'instant initial on a $\Psi\,(A, t) \equiv U\,(A, t)$).

Traçons maintenant autour de A des surfaces sphériques Σ. Désignons dorénavant par σ les parties de ces surfaces comprises à l'intérieure du volume V et par σ_a les parties des mêmes surfaces situées à l'extérieur de V et dans V_a (on a donc $\sigma_a = 4\pi\rho^2 - \sigma$). Orientons le sistème formé par les champs de Ψ et de Ψ_a dans toutes les directions de l'espace autour du point A. Comme résultat de cette opération on forme, à chaque instant, un nouveau champ qui resulte de la superposition d'une infinité de champs $\Psi_1, \Psi_2, \ldots$; $(\Psi_a)_1$; $(\Psi_a)_2, \ldots$, dont chacun corres-

[1] Au sujet de l'existence d'une fonction Ψ_a dans un volume V_a quand la surface qui limite ce volume comporte une arête, comme c'est le cas ici, voir les remarques de la fin du § 4.

pond à une orientation déterminée du système (Ψ, Ψ_a). Formons alors en chaque point les moyennes aritmétiques:

$$\Psi_p = \frac{1}{n}[\Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \dots \Psi_n' + (\Psi_a)_1 + (\Psi_a)_2 + (\Psi_a)_3 + \dots + (\Psi_a)_n], \tag{47}$$

et faisons tendre n vers l'infini. Il vient:

$$\Psi_p = \frac{1}{\Sigma}\left[\iint_\sigma \Psi\, d\sigma + \iint_\sigma \Psi_a\, d\sigma_a\right],$$

ou bien, en explicitant les angles solides Ω qui correspondent aux surfaces σ:

$$\Psi_p = \frac{1}{4\pi}\left[\Omega\,\overline{\Psi}(\sigma) + (4\pi - \Omega)\,\overline{\Psi}_a(\sigma_a)\right] \tag{48}$$

L'équation des ondes étant linéaire, est satisfaite par la somme d'un nombre quelconque de solutions. Or, dans (47), chaque Ψ_i et chaque $(\Psi_a)_i$ satisfait à l'équation des ondes, et il en sera de même de la moyenne (48) obtenue en faisant tendre n vers l'infini dans (47). Le champ Ψ_p ainsi défini possède évidemment une symétrie sphérique autour du point A. Il satisfait donc à l'équation des ondes sphériques qui s'écrit:

$$\frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial \Psi_p}{\partial \rho}\right). \tag{49}$$

Pour pouvoir déduire la solution de cette équation au point A, il faut que Ψ_p soit une fonction continue sans singularités, même à l'origine $(\rho = 0)$. (L'équation précédente exige que $\frac{\partial \Psi_p}{\partial \rho}$ s'anule au centre lorsqu'on n'a pas $\frac{\partial^2 \Psi_p}{\partial \rho^2} = \infty$ au même point). La fonction définie par (48) satisfait à ces conditions. Elle est continue si les fonctions $\overline{\Psi}$ et $\overline{\Psi}_a$ le sont (ce que nous supposons toujours) et si la surface S est une surface régulière, ce qu'on peut toujours supposer. Cette fonction n'a pas de singularités, et *au centre* on a:

$$\frac{\partial \Psi_p}{\partial \rho} = \frac{1}{4\pi}\left[\Omega\frac{d\overline{\Psi}(\sigma)}{d\rho} + (4\pi - \Omega)\frac{d\overline{\Psi}_a(\sigma_a)}{d\rho} + \frac{d\Omega}{d\rho}\left(\overline{\Psi}(\sigma) - \overline{\Psi}_a(\sigma_a)\right)\right] = 0. \tag{50}$$

En effet, on a évidemment $\left[\overline{\Psi}(\sigma)\right]_{\rho=0} = \left[\overline{\Psi}_a(\sigma_a)\right]_{\rho=0} = \Psi(\mathrm{A})$. D'autre part, on peut écrire, d'après la formule de Gauss, si on désigne par v et v_a les volumes compris entre la surface S et les surfaces σ et σ_a respectivement:

$$[\triangle\Psi](\mathrm{A}, t) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\sigma}{v}\frac{d\Psi(\sigma)}{d\rho} + \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{v}\iint_{\mathrm{S}}\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial n}\,d\mathrm{s}, \tag{51}$$

et:

$$[\triangle\Psi_a](\mathrm{A}, t) = \lim_{\rho\to 0}\frac{\sigma_a}{v_a}\frac{d\overline{\Psi}_a(\sigma_e)}{d\rho} + \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{v_a}\iint_{\mathrm{S}}\frac{\partial_a\Psi}{\partial n}\,d\mathrm{s}. \tag{52}$$

Les deuxièmes termes des seconds membres s'annulent, à cause de la deuxième condition (45); et comme les laplaciens de Ψ et de Ψ_a sont des grandeurs finies, il faut que les dérivées $\frac{d\overline{\Psi}(\sigma)}{d\rho}$ et $\frac{d\overline{\Psi}_a(\sigma_a)}{d\rho}$ s'annulent pour $\rho=0$. La dérivée (50) est donc nulle pour $\rho=0$.

La fonction Ψ_p satisfaisant à toutes les conditions de régularité nécessaires, et à l'équation (49), on peut écrire pour cette fonction la formule de Poisson, qu'on déduit de (49) par un calcul classique. On a donc:

$$\Psi_p(A,t)=t\left(\frac{\partial\Psi_p}{\partial t}\right)_o(ct)+\frac{d}{dt}\left[t\overline{\Psi}_p^o(ct)\right]. \tag{53}$$

Mais pour $\rho=0$ on a identiquement, d'après (48): $\Psi_p(A,t)=\Psi(A,t)$. En remplaçant $\left(\frac{\partial\Psi_p}{\partial t}\right)_o$ et Ψ_p^o par leurs valeurs données par (48), il vient donc:

$$\Psi(A,t)=\frac{t}{4\pi}\left\{\Omega\left[\overline{\mu}_o(\sigma)-\overline{\gamma}_o(\sigma_a)\right]+4\pi\overline{\gamma}_o(\sigma_a)\right\}_{\rho=ct}+ \tag{54}$$
$$+\frac{1}{4\pi}\frac{d}{dt}\left\{t\left[\Omega\left(\overline{\Psi}_o(\sigma)-\overline{\Psi}_a^o(\sigma_a)\right)+4\pi\overline{\Psi}_a^o(\sigma_a)\right]\right\}_{\rho=ct}$$

où l'on a posé:

$$\overline{\Psi}_a^o=\frac{1}{\sigma_a}\iint_{\sigma_a}\Psi_a(x,y,z,t=0)\,d\sigma_a,$$

et:

$$\overline{\gamma}_o=\frac{1}{\sigma_a}\iint_{\sigma_a}\frac{\partial\Psi_a}{\partial t}(x,y,z,t=0)\,d\sigma_a.$$

[$\overline{\mu}_o$ et $\overline{\Psi}_o$ ont la même signification que dans (33)]

Nous sommes ainsi arrivés à une formule générale qui est cette fois *une véritable formule de prévision,* car elle ne contient que des fonctions connues.

Pour $t=0$ cette formule donne immédiatement la condition initiale $\Psi(A,0)=\overline{\Psi}_o(0)$. En dérivant par rapport au temps, on trouve aussi, pour $t=0$: $\left(\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right)_o(A,0)=\overline{\mu}_o(0)$, puisque, pour $t=0$ (ou $\rho=0$) toutes les dérivées premières $\frac{d}{d\rho}=\frac{1}{c}\frac{d}{dt}$ des fonctions $\overline{\mu}_o(\sigma)$, $\overline{\gamma}_o(\sigma_a)$ $\overline{\Psi}_o(\sigma)$, $\overline{\Psi}_a(\sigma_a)$ s'annulent, comme nous l'avons vu. La formule (54) donne encore, pour $t=0$, en la dérivant deux fois:

$$\frac{\partial^2\Psi}{\partial t^2}(A,0)=\frac{3}{2}c^2\left[\left(\frac{d^2\overline{\Psi}_o(\sigma)}{d\rho^2}\right)_{\rho=0}+\left(\frac{d^2\overline{\Psi}_a^o(\sigma_a)}{d\rho^2}\right)_{\rho=0}\right]. \tag{55}$$

Or, de la définition (48), on tire:

$$\Delta\Psi_p(A,t)=\frac{3}{2}\left[\left(\frac{d^2\overline{\Psi}(\sigma)}{d\rho^2}\right)_{\rho=0}+\left(\frac{d^2\Psi_a(\sigma_a)}{d\rho^2}\right)_{\rho=0}\right]=\frac{1}{2}\left[\Delta\Psi+\Delta\Psi_a\right](A,t).$$

Mais, comme à tout instant $\frac{\partial^2\Psi_a}{\partial t^2}(A)=\frac{\partial^2\Psi_p}{\partial t^2}(A)$ et que, d'autre part, nous savons que Ψ_a

et Ψ_p satisfont à l'équation des ondes, on a l'identité $[\triangle \Psi_p](A) \equiv [\triangle \Psi_a](A)$. La relation (55) devient donc:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2}(A, 0) = c^2 [\triangle \Psi](A, 0) \ .$$

On retrouve ainsi l'équation des ondes pour Ψ. D'ailleurs, la formule (54) satisfait à l'équation des ondes à tout instant, car Ψ_p satisfait à la formule de Poisson. Comme celle-ci est en plein accord avec l'équation des ondes pour toute valeur de t, il en est de même pour Ψ déduit de (54), par suite des identités $\Psi(A, t) \equiv \Psi_p(A, t)$ et $[\triangle \Psi](A, t) \equiv [\Delta \Psi_p](A, t)$.

Lorsqu'on désire prévoir la fonction Ψ pour un autre point A_1 de la surface S, il faut naturellement changer de fonction auxiliaire Ψ_a en déterminant, par l'intégrale de surface de Kirchhoff, une nouvelle fonction Ψ'_a satisfaisant à l'équation des ondes dans tout le volume V_a et aux conditions suivantes:

$$\Psi'_a = \Psi(A_1, t) \ ; \ \frac{\partial \Psi'_a}{\partial n} = 0 \quad \text{sur } S_a \text{ et } s \ .$$

Lorsque la surface S comporte une partie plane, la formule (54) se réduit à la formule de Poisson. D'ailleurs, dans ce cas on peut choisir simplement comme fonction auxiliaire Ψ_a l'image de la fonction Ψ par rapport au plan S, ce qui réduit immédiatement la formule (54) à la formule (33).

e) — Nous devons aborder maintenant une question capitale. Ayant trouvé la formule générale de prévision de Ψ sur la surface S, il faut passer à la seule prévision qui nous importe, celle de la fonction U sur S, car Ψ n'est en somme qu'un intermédiaire de calcul. En tenant compte de la première condition (1), c'est-à-dire de la condition $\Psi = U$ sur S, il peut sembler, à première vue, qu'on peut affirmer sans hésitation que la formule fondamentale (54) donne automatiquement la prévision de U sur S en remplaçant tout simplement son premier membre par U (A, t). Mais nous devons faire à ce sujet une remarque importante.

La condition $\Psi = U$ nous dit seulement qu'il est toujours possible de trouver une fonction Ψ (satisfaisant aux conditions indiquées plus haut) et telle qu'à tout instant on ait identité entre les valeurs de Ψ et de U sur S. Nous avons vu que la formule de Kirchhoff permet de déterminer la fonction Ψ dans le volume V (limité par S) et sur S *jusqu'à l'instant initial* et nous savons d'autre part qu'à tout instant (avant ou après l'instant initial) la même fonction, ainsi déterminée jusqu'à $t = t_0$, satisfait à l'équation (29), dont nous avous trouvé la solution générale (54). Mais ceci ne veut pas dire que la fonction qui est déterminée par (54) soit forcément telle qu'à tout instant de l'avenir l'on ait encore $U = \Psi$ sur S. En effet, comme on ne peut pas faire intervenir pour $t > t_0$ cette condition aux limites, car il s'agit précisément de prévoir U sur S, il peut arriver que le problème posé par l'équation (49) ne soit pas bien defini. La fonction que l'on déduit par (54) en partant de conditions initiales données satisfait évidemment à l'équation des ondes $\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = c^2 \triangle \Psi$, puisque (54) n'est qu'une transformation mathématique de cette équation. De plus, elle satisfait aussi identiquement à la condition $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ sur S, puisque nous avons posé explicitement cette condition en passant de (15) à (54). Mais nous ne savons pas si la solution (54) satisfait aussi à la condition fondamentale $\Psi = U$.

Il est donc indispensable de chercher quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'on puisse affirmer que la condition $\Psi = U$ est satisfaite identiquement en chaque point de la surface S et à tout instant de l'avenir par la solution (54) de (29). C'est ici que va intervenir d'une manière décisive la classification des évolutions résumée dans le tableau du § 1.

Considérons d'abord le premier cas de ce tableau : la fonction U (A, t) qui donne les valeurs de U sur S est une fonction holomorphe, c'est-à-dire analytique et régulière. La caractéristique des fonctions holomorphes est que leur prolongement est bien défini. Si donc U est holomorphe par rapport aux variables d'espace et de temps, et si l'on considère, en un point fixe A de S, un fragment de durée quelconque du passé de U, tout son avenir au même point est déterminé. Cela ne veut pas dire que cette propriété suffit pour faire effectivement la prévision dans tous les cas, car le développement en série de Maclaurin de la fonction U (t) en un point, tout en étant convergent, peut demander la connaissance de dérivées d'ordre élevé pour arriver à une prévision suffisamment précise pour une échéance donnée, et d'ailleurs l'ordre minimum des dérivées qu'il suffit de considérer augmente en général quand l'échéance augmente, pour une même précision de la prévision. La prévision par la série de Maclaurin ne peut être qu'une prévision théorique, sauf dans quelques cas particulièrement simples.

Mais si la fonction U (A, t) est holomorphe sur S, nous pouvons affirmer que la fonction Ψ, déterminé jusqu'à l'instant initial dans le volume V par la formule de Kirchhoff (11), sera aussi holomorphe par rapport aux quatre variables x, y, z, t. L'avenir de la fonction Ψ, ainsi déterminée, est donc bien défini dès $t = t_o$. Or, la formule (54) ne peut fournir que des fonctions holomorphes si l'on part d'une surface S elle-même holomorphe (comme il est toujours permis de le faire) et de données initiales Ψ_o (σ) et μ_o (σ) holomorphes. C'est ce qui arrive si U est holomorphe et si Ψ satisfait sur S jusqu'à $t = t_o$ à la condition $\Psi = U$. La fonction qui résulte de (54) étant holomorphe et prenant pour $t \leq t_o$ la valeur $\Psi_k = \Psi$ (l'indice voulant dire qu'il s'agit de la fonction déterminée par la formule de Kirchhoff jusqu'à $t = t_o$), nous pouvons affirmer qu'elle coïncidera pour tout instant de l'avenir avec U, c'est-à-dire qu'elle est le prolongement de cette fonction. Il n'y a pas en effet deux fonctions holomorphes de t prenant jusqu'à $t = t_o$ les mêmes valeurs et des valeurs différentes pour $t > t_o$. Dans le cas où U (A, t) est holomorphe on peut donc affirmer que la solution (54) satisfait à la condition $U = \Psi$ pour tout instant de l'avenir pour lequel cette formule (54) est valable. La prévision de U sur S est donc donnée par (54) en y remplaçant simplement le premier membre par U (A, t).

Considérons maintenant les deuxième et troisième cas du tableau, caractérisés par le fait qu'il n'y a pas de création de nouvelles discontinuités des dérivées spatiales et temporelles de U sur S. Comme la fonction U est encore supposée continue sur S, de même que ses dérivées spatiales et temporelles de premier ordre sur S, et comme en outre on admet que les dérivées secondes sur cette surface sont intégrables, la formule (11) est applicable et l'on en déduit une fonction Ψ continue (ainsi que ses dérivées premières) à l'intérieur du volume V et satisfaisant jusqu'à l'instant $t = t_o$ à la condition $\Psi = U$ sur S. Comme la surface S est encore supposée avoir une équation holomorphe, toutes les singularités spatiales ou temporelles dans les dérivées supérieures de la fonction Ψ du volume V proviendront uniquement de singularités des dérivées de la fonction U (A, t) qui donne la distribution de U sur S jusqu'à l'instant initial. Ces singularités forment des surfaces dans le volume V et se raccordent sur S avec les singularités des dérivées correspondantes de la distribution de U sur S. Dans ces conditions, toute discontinuité dans les dérivées $\frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n}$ en un point A de S provient uniquement du passage en A de surfaces de discontinuité préexistantes des dérivées spatiales de Ψ dans le volume V. On peut donc affirmer, dans ce cas, que s'il n'y a pas de création de nouvelles discontinuités des dérivées spatiales de U pendant un intervalle de temps τ après l'instant initial, la cause des discontinuités temporelles se trouve déjà dans le volume V à l'instant initial. Dans les condition initiales de Ψ $\left(\text{et } \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right)$ se trouvent déjà «inscrites» toutes les singularités temporelles que Ψ (ou U) peuvent présenter sur S, pendant l'intervalle de temps τ après t_o. La formule fondamentale fournit donc une fonction satisfaisant encore à la condition $\Psi = U$ sur S pendant cet intervalle de temps et résoud le problème de la prévision de U.

Il n'en va pas de même lorsqu'il y a création de nouvelles discontinuités sur S. Des questions nouvelles et très complexes se posent alors et nous ne voulons même pas en aborder l'étude ici.

Remarques — Lorsque les conditions du problème demandent la prévision de l'évolution en chaque point d'un volume et non seulement sur une surface, une seule surface S ne suffit plus. La prévision de U en un point A_1 (x, y, z) du volume demande seulement la connaissance des conditions initiales et passées sur une surface fermée S_1 passant par A_1 et située dans le champ; à cette surface et à ces conditions initiales et passées correspond une fonction Ψ_1 qui permet de faire la prévision de U. Pour tout autre point de la même surface la prévision est faite par la même fonction Ψ. Pour un point A_2 qui n'est pas sur S_1 il faut considérer une autre surface fermée S_2 passant par A_2. A cette deuxième surface et aux conditions initiales et passées de U sur S_2, correspond une autre fonction Ψ_2 permettant de prévoir l'évolution de U sur S_2. Pratiquement, la prévision dans un volume V n'est que la prévision pour chaque point d'un réseau de points et il faut choisir les surfaces fermées S_i de façon à pouvoir faire la prévision sur tous les points avec le minimum de surfaces.

3 — *La question du référentiel principal et de la constante c.* — Nous n'avons pas indiqué jusqu'à présent quel est le système d'axes de référence par rapport auquel il faut étudier l'évolution de la grandeur U qu'on veut prévoir pour qu'on puisse définir une fonction Ψ. S'il s'agit, comme c'est le cas général, d'un champ U (x, y, z, t) dont le domaine de définition D n'est pas illimité et comporte donc une frontière S_D à distance finie, il y a une infinité de référentiels qui doivent être tout de suite éliminés. En effet, tout référentiel dans lequel une surface fermée S immobile ne reste pas toujours dans le domaine D ne peut convenir à l'étude de l'évolution. C'est là une première condition, mais nous pouvons y ajouter une autre beaucoup plus précise en nous reportant à la démonstration que nous avons donnée de l'existence d'une fonction Ψ par la considération d'un fluide élastique enfermé dans une surface immobile S et animé de petits mouvements. Cette démonstration n'est valable que si on étudie les petits mouvements dans un référentiel par rapport auquel le fluide est au repos, abstraction faite des petits mouvements. Ce référentiel par rapport auquel il n'y a ni rotation ni translation d'ensemble de la matière est appelé le référentiel principal du milieu. De même, pour le champ U (x, y, z, t) nous pouvons définir un référentiel principal. C'est celui par rapport auquel toute l'évolution résulte d'une déformation pure des surfaces de niveau de la fonction U, au sens que l'on donne à l'expression «déformation pure» dans la cinématique classique des milieux continus. On montre d'ailleurs qu'un référentiel principal existe quelle que soit la complication de l'évolution du champ U (x, y, z, t).

Nous pouvons donc dire qu'il faut étudier l'évolution de U par rapport à son référentiel principal pour être sûr qu'une fonction Ψ existe. Cela ne veut pas dire qu'une fonction Ψ n'existe que dans ces conditions, mais on ne peut pas en être sûr a priori.

Au sujet de la constante c, qui figure, explicitement ou implicitement, dans toutes les équations il faut faire les remarques suivantes.

On peut se poser la question suivante: pour un champ U (A, t) donné sur une certaine surface S, existe-t-il une fonction Ψ dans le volume V limité par S, quelle que soit la valeur de la constante c? On doit répondre afirmativement. En effet, quelle que soit la constante c la démonstration de l'existence de Ψ est valable. On peut toujours imaginer un fluide parfait homogène enfermé dans V et tel que ses propriétés élastiques donnent précisément pour la vitesse de propagation des ébranlements la valeur arbitrairement choisie pour la constante c. On doit cependant éviter les valeurs limites $c = \infty$ et $c = 0$ car alors la relation (7) devient indéterminée, en ce sens qu'on ne sait plus selon quelle loi il faut faire varier la condensation à la surface pour avoir un potentiel des vitesses dont la dérivée première varie suivant une loi a priori.

Si théoriquement la valeur de c est arbitraire, il n'en est pas de même pratiquement. La

prévision effective de l'évolution d'une grandeur U n'est pas possible quand on donne à la constante c une valeur arbitraire. Considérons en effet la formule (13) de Kirchhoff qui nous sert à la détermination des conditions initiales de la fonction Ψ. Comme on ne dispose pas d'observations de la grandeur U à prevoir sur la surface S relatives à un passé arbitrairement lointain, mais seulement les observations pendant une période T avant l'instant initial, il faut choisir c de façon à avoir :

$$\frac{r}{c} \leq T.$$

D'ailleurs, circunstance encore plus importante, une même erreur dans les données de $\frac{\partial U}{\partial t}$ aura d'autant plus d'importance que c est plus petit, ainsi que le montre la fomule de Kirchhoff par le terme $\frac{1}{cr} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n}$. D'autre part, les formules fondamentales de prévision montrent que pour une prévision d'échéance ϑ il faut considérer des conditions initiales de $\overline{\Psi}(\sigma)$ et $\overline{\mu}(\sigma)$ sur des surfaces σ dont le rayon est donné par $\rho = c\vartheta$. Or, on a intérêt à faire la prévision avec un champ initial d'étendue aussi réduite que possible ; pour cela il faut que c on ne dépasse pas une certaine valeur. Ainsi, pour un champ donné et pour une certaine échéance de la prévision, il existe une valeur optimum de c qu'il faut adopter. Cette valeur dépend des dimensions du champ, ainsi que de la précision cherchee dans les résultats.

4 — *Remarques sur la fonction* U (x, y, z, t). — Nous avons établi, dans un autre travail [1], qu'il faut faire une distinction entre le champ passif d'une grandeur et le champ actif ou dynamique. Le champ passif est celui qui subsiste quand on solidifie par la pensée le milieu et dont la non-uniformité dans l'espace ne contribue donc rien à l'évolution. Devons-nous faire ici aussi une séparation du champ total en deux parties, pour pouvoir lui appliquer la théorie développée dans ce mémoire ? En serrant de plus près le raisonnement qui nous a permis de conclure à l'existence d'une fonction Ψ, il est facile de voir qu'il faut en effet décomposer le champ total.

Considérons la formule (7) :

$$a\, U(A, t) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(A, t) = c^2 q(A, t). \tag{7}$$

Déterminons la vitesse $\vec{v}$ du petit mouvement (dont le facteur de condensation est q) qui correspond à la fonction U (A, t) sur S. On a, puisque $\vec{v}$ est tangent à S en chaque point de cette surface :

$$\vec{v}(A, t) = \vec{v}_0(A, 0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{grad}_s \Phi\, dt$$

ou bien :

$$\vec{v}(A, t) = \vec{v}_0(A, 0) + a \int_0^t \operatorname{grad}_s U\, dt\,,$$

grad_s désignant la projection du gradient sur la surface S.

En un point quelconque on peut toujours faire la décomposition :

$$U(x, y, z, t) = \overline{U}(x, y, z) + u(x, y, z, t)\,, \tag{56}$$

---

[1] Loc. cit.

$\overline{U}$ étant la moyenne dans le temps prise pendant toute la «durée» (τ) de l'évolution:

$$\overline{U}(x, y, z) = \frac{1}{\tau} \int U(x, y, z, t)\, dt.$$

Cette valeur moyenne peut varier d'un point à l'autre, mais ne change évidemment pas avec le temps. Nous pouvons donc écrire:

$$\vec{v}(A, t) = \vec{v}_o(A, 0) + a\,(\mathrm{grad}_s\, \overline{U})\, t + a \int_o^t \mathrm{grad}_s\, u\, dt\,.$$

En un point, la grandeur U ne peut devenir au cours du temps plus grande qu'une certaine valeur maxima ou plus petite qu'une certaine valeur minima. Le troisième terme du second membre de la relation précédente est donc une grandeur qui ne peut augmenter indéfiniment quand le temps s'écoule. Cette intégrale doit varier de part et d'autre de la valeur zéro. Par contre, le deuxième terme joue le rôle d'une perturbation séculaire et croît au delà de toute limite quand t augmente si les valeurs moyennes $\overline{U}$ ne sont pas les mêmes en chaque point de S.

Or, $\vec{v}$ est la vitesse d'un petit mouvement, ce qui veut dire qu'à tout moment les produits $\vec{v} \cdot \vec{v}$ et $\vec{v} \cdot \vec{v}_o$ doivent pouvoir être considérés comme des infiniment petits du second ordre par rapport à $\vec{v}$ ou à $\vec{v}_o$. Cette condition n'est pas réalisé si l'on a $\mathrm{grad}_s\, \overline{U} \neq 0$. Dans ce cas général, la démonstration de l'existence de Ψ (qui fait intervenir à tout moment un petit mouvement) ne serait pas valable. Pour pouvoir affirmer l'existence d'une fonction Ψ, il faut donc faire la décomposition (56) et appliquer la formule (7) aux écarts u par rapport aux moyennes temporelles. Ceci revient à dire que pour prévoir l'évolution d'une fonction U sur une surface S, par l'intermédiaire d'une fonction Ψ, il faut connaître les valeurs moyennes $\overline{U}$ et déterminer le Ψ qui correspond aux écarts u. C'est donc seulement à ces écarts que la théorie s'applique en toute sûreté.

Nous allons nous rendre compte maintenant, par un autre moyen, de la nécessité de la décomposition (56). Soit U une fonction satisfaisant ou non à l'équation des ondes. Pour cette fonction on peut toujours écrire:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \triangle U = f(x, y, z, t)\,. \tag{57}$$

En appliquant le théorème de Kirchhoff en un point du domaine V occupé par U il vient:

$$U(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{t - \frac{r}{c}} ds - \frac{1}{4\pi} \iiint_V \frac{(f)_{t - \frac{r}{c}}}{r}\, dv \tag{58}$$

l'indice $t - \frac{r}{c}$ ayant le même signification que précédemment. Appliquons aussi le même théorème en un point x, y, z situé en dehors du domaine V. On sait que l'on obtient alors:

$$\iint_S \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{t - \frac{r}{c}} ds = -\iiint_V \frac{(f)_{t - \frac{r}{c}}}{r}\, dv\,, \tag{59}$$

relation qui généralise la forme que prend la formule de Green sur les fonctions harmoniques lorsque le point x, y, z est en dehors du domaine d'intégration.

Mais nous savons qu'il est possible de trouver une fonction Ψ satisfaisant à l'équation des ondes et aux conditions aux limites (1) sur la surface S. Si on applique à Ψ le théorème de Kirchhoff en un point x, y, z en dehors du domaine d'intégration, il vient donc:

$$\iint_S \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{t - \frac{r}{c}} ds = 0 . \tag{60}$$

La comparaison de (59) et de (60) donne donc la relation:

$$\iint_S \frac{1}{r} \left(\frac{\partial U}{\partial n} \right)_{t - \frac{r}{c}} ds = \iiint_V \frac{(f)_{t - \frac{r}{c}}}{r} dv .$$

Considérons le cas particulier des fonctions permanentes. Les relations (59) et (60) prennent respectivement les formes:

$$\iint_S \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = - \iiint_V \frac{f}{r} dv , \tag{59'}$$

$$\iint_S U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds = 0 ; \tag{60'}$$

ce qui donne:

$$\iint_S \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} ds = \iiint_V \frac{f}{r} dv \tag{61}$$

comme condition générale de permanence.

Considérons enfin des fonctions U permanentes et harmoniques ($\Delta U = 0$). On obtient dans ce cas les trois conditions suivantes, valables quelle que soit la position du point x, y, z extérieur au volume V:

$$\iint_s \left(U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 0 ; \quad \iint_s U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds = 0 ; \quad \iint_s \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial n} ds = 0 . \tag{62}$$

Mais le Ψ qui correspond dans ce cas à la fonction harmonique est donné par

$$\Psi_{harm} = - \frac{1}{4\pi} \iint_s U \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} ds . \tag{63}$$

dans le volume V, ainsi qu'il résulte d'une application immédiate de la formule de Green, car on a ici sur S: $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$. Or, on sait (c'est là un théorème classique sur les fonctions harmoniques) qu'une fonction harmonique uniforme et finie dans un volume V et qui admet sur la surface de ce volume une dérivée normale nulle, doit se réduire à une constante. La formule (63) ne serait donc compatible avec l'existence d'une fonction harmonique Ψ que si U est constant ou nul. Si par U on entend les valeurs totales d'une fonction permanente et harmonique, on

trouve donc un résultat contradictoire, puisque cette fonction totale peut prendre sur S des valeurs arbitraires. Nous voyons donc qu'à la place de la valeur totale de la fonction il faut prendre les écarts u par rapport aux moyennes temporelles. Dans les cas que nous sommes en train d'examiner (fonctions *permanentes*) ces écarts sont évidemment nuls et $f = 0$. Les relations (60') et (61), dans lesquelles on remplace U par u, sont donc identiquement satisfaites, ainsi que les conditions (62). Cet exemple nous montre donc la nécessité de la décomposition (56). Dans toutes les formules de la théorie il faut donc supposer que la fonction à prévoir n'est pas la fonction totale elle-même (fonction U qui résulte des mesures) mais bien les écarts (u) par rapport aux moyennes temporelles «normales» de U.

Achevons maintenant de préciser le théorème d'existence du § 1 par les remarques suivantes:

1.° — Soit un volume dont la surface limite comporte des arêtes, comme c'est le cas pour le volume V_a dans lequel on détermine la fonction auxiliaire Ψ_a qui permet de prévoir Ψ sur S. Si les valeurs de la fonction Ψ ne sont pas uniformes sur la surface de ce volume, on ne peut pas dire qu'il existe à l'intérieur du volume un petit mouvement d'un fluide élastique dont le facteur de condensation est relié aux valeurs de Ψ sur la surface limite du volume par la relation (7). En effet, en un point d'une arête, la projection $\text{grad}_s\, \Psi$ du gradient de Ψ sur la surface limite S n'est pas bien définie, tandis que la fonction $\text{grad}_s \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ doit satisfaire à des conditions restrictives très spéciales qui seront en général incompatibles avec la distribution de Ψ sur la surface limite. Si cette surface comporte des arêtes, on ne peut donc faire correspondre un petit mouvement à une fonction donnée à priori que si cette fonction prend des valeurs constantes en chaque point de la surface et variant seulement d'un instant à l'autre. C'est précisément le cas pour la fonction auxiliaire Ψ_a dont on peut ainsi affirmer l'existence.

2.° — Nous n'avons considéré jusqu'ici que des volumes limités par une seule surface avec ou sans arêtes. Qu'arrive-t-il, au point de vue de l'existence d'une fonction Ψ, lorsqu'il s'agit d'un volume qui, tout en étant simplement connexe, est cependant limité par plus d'une surface. Considérons par exemple (fig. 7) un volume V compris entre les deux surfaces S_1 et S_2. Le

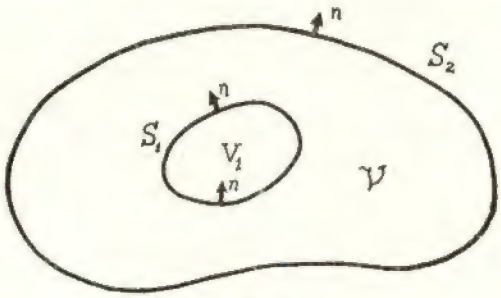


Fig. 7

théorème d'existence nous dit qu'il existe toujours, dans le volume V_1 limité par S_1, une fonction Ψ satisfaisant à l'équation des ondes et aux conditions (1), si la surface S_1 est régulière et si la fonction Ψ est continue. Dans ces conditions, si on applique le théorème de Kirchhoff en un point situé à l'extérieur de S_1 on aura le résultat (60). Si on admet donc qu'il existe dans le volume V une fonction Ψ satisfaisant à l'équation des ondes et aux mêmes conditions (1) sur la surface S_1, cette fonction sera déterminée par l'intégrale de surface de Kirchhoff étendue à la seule surface S_2. Ainsi, une application brutale du théorème d'existence du § 1 pourrait conduire à première vue au résultat, visiblement absurde, qu'on peut donner à la fonction Ψ n'importe quelles valeurs se succédant d'une façon continue sur la surface S_2 pour avoir quand même dans tous les cas les mêmes valeurs de Ψ sur la surface S_1. Or, si nous avons recours à la considération d'un petit mouvement dans le volume V, nous pourrons dire ce qui suit: les deux surfaces S_1 et S_2 étant absolument indépendantes, il n'y a aucune raison pour supposer

qu'on obtient dans le volume V un seul petit mouvement en donnant des valeurs arbitraires à la fonction Ψ sur S_1 et sur S_2. En général, aux valeurs a priori de la fonction sur S_1 correspondra, dans le volume V, un petit mouvement qui ne prendra pas sur S_2 des valeurs données aussi à l'avance, et inversément. On voit donc que le théorème d'existence ne peut s'appliquer en toute sûreté que si le volume V est limité par une seule surface.

Après les remarques de ce paragraphe, ce théorème d'existence prendra donc la forme définitive suivante:

Soit un volume V limité par une seule surface régulière S et une fonction U (x, y, z, t) continue, finie, ainsi que ses dérivées premières et secondes, dans le volume V et sur sa surface. Formons les écarts u (x, y, z, t) de cette fonction par rapport aux valeurs des moyennes temporelles U (x, y, z) relative à toute la «durée» de l'évolution. On peut alors affirmer qu'il existe, dans le volume V, une fonction Ψ satisfaisant à l'équation des ondes et aux conditions suivantes:

$$\Psi = u \quad ; \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0 \qquad \text{sur S} ,$$

quelle que soit la fonction U (x, y, z, t). Si la surface comporte des arêtes, alors la fonction Ψ n'existe que si la fonction U est telle que les écarts u (x, y, z, t) prennent la même valeur en tout point de S.

Avant de finir ce paragraphe, faisons encore une dernière remarque sur la relation (7). Cette relation ne s'applique évidemment qu'à une grandeur u scalaire, car le facteur de condensation est un scalaire. Si la fonction à prévoir est vectorielle, tensorielle (ou une autre quelconque parmi les grandeurs généralisées), la théorie développée dans ce mémoire s'applique encore à leur évolution continue, car la relation (7) peut s'écrire séparément pour chaque «composante» de ces grandeurs, composantes qui sont des scalaires.

5 — *Application à la prévision quantitative du temps à échéance quelconque*—Proposons-nous de prévoir les variations d'une grandeur météorologique quelconque U (x, y, z, t) qui, à une certaine échelle des observations, peut être représentée par une fonction continue admettant des dérivées partielles premières et secondes continues. On sait que la prévision de la valeur totale de la grandeur U demande la décomposition (56), U étant les valeurs moyennes «normales» de U en un point de l'atmosphère. Les formules de prévision doivent être appliquées à u.

Pour prévoir u en un point de l'atmosphère il faut faire passer par ce point une surface fermée régulière S. Sur cette surface on doit connaître les valeurs initiales et passées de u et $\frac{\partial u}{\partial t}$. Ce sera le cas si la surface S est la surface de la Terre, c'est-à-dire si on désire prévoir U en un point de la surface de la Terre (fig. 8).

Il faut déterminer d'abord les conditions initiales de la fonction Ψ qui satisfait à tout instant à l'équation des ondes dans le volume V limité par S (ce volume sera celui qui est occupé par le globe terrestre si on désire faire la prévision à la surface de la Terre) et aux conditions $\Psi = u$; $\frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$ en chaque point de S. Cette fonction est donnée par l'intégrale de surface de Kirchhoff et s'écrit ici:

$$\Psi(x, y, z, t_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \left(u \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{t_0 - \frac{r}{c}} ds , \tag{64}$$

car on a évidemment $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}$. Quant à la détermination de $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ initial, on peut utiliser les deux procédés indiqués dans le §. En considérant une surface régulière S_a rencontrant la sur-

face du globe et limitant avec elle un volume V_a, on déterminera la fonction auxiliaire par la formule :

$$(65) \qquad \Psi_a(x, y, z, t_o) = -\frac{1}{4\pi} \iint_{S+S_a} \left(u(A, t) \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n} - \frac{1}{cr} \frac{\partial U(A, t)}{\partial t} \frac{\partial r}{\partial n} \right)_{t_o - \frac{r}{c}} ds ,$$

dans laquelle U (A, t) représente les valeurs que prend jusqu'à l'instant initial la fonction à prévoir au point A de la surface S où l'on désire faire la prévision.

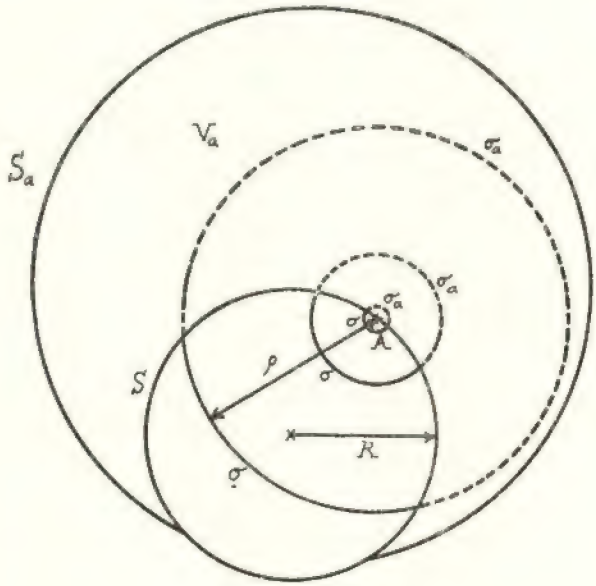


Fig. 8

Ayant déterminé les conditions initiales de Ψ et de Ψ_a, la prévision est donnée par la formule fondamentale (54). En assimilant la surface de la Terre à une sphère on a, en un point quelconque de S si R désigne le rayon de la Terre :

$$(66) \qquad \Omega(\rho) = 2\pi \left(1 - \frac{\rho}{2R}\right) \quad \text{ou} \quad \Omega(ct) = 2\pi \left(1 - \frac{ct}{2R}\right)$$

Cette relation n'est évidemment valable que dans l'intervalle $\rho = 0$ à $\rho_m = 2R$. L'échéance maxima de la prévision élémentaire par la formule (54) est donc donnée par $\tau_m = \frac{\rho_m}{c}$. On sait que c est théoriquement arbitraire, mais qu'il y a une valeur optimum pour cette constante. Prenons une valeur «normale» : 50 Km/heure, qui correspond bien à la vitesse moyenne de propagation des phénomènes météorologiques, ainsi qu'au rapport ρ_o/τ_o des échelles d'espace (ρ_o) et de temps (τ_o) des observations de la météorologie synoptique. (On sait que ce rapport joue un grand rôle dans l'évolution ; voir op. cit.). Avec la valeur choisie ici pour c on a $\rho_m = 50\ \tau_m$. Deux cas sont à distinguer : la prévision à courte échéance et la prévision à

longue échéance. La première est caractérisée par le fait que $\frac{\rho}{2R}$ est négligeable par rapport à l'unité. Etant donnée la précision des observations, négligeable veut dire ici que $\frac{\rho}{2R}$ ne dépasse pas l'ordre de grandeur 10^{-1}. Ceci a lieu pour une échéance de la prévision $\tau_m \leq 26$ heures. On peut alors ne pas tenir compte de la courbure de la Terre et faire la prévision par la formule (33). Pour la prévision à longue échéance, on ne peut pas se contenter de faire des applications successives de la formule (33), portant chacune sur une petite échéance: on ne s'assurerait pas ainsi contre la possibilité des erreurs accumulées. Il faut donc appliquer la formule générale (54) avec la valeur (66) de Ω.

Nous ne discuterons pas ici certaines questions d'ordre pratique (telle que l'influence des erreurs des observations sur les résultats de la prévision). Nous préférons les examiner plus tard dans un travail spécial.

Conclusion — Résumons en quelques mots le caractère général de la théorie.

Au point de vue physique, cette théorie n'est en somme qu'une formulation nouvelle du principe d'action de contact et montre qu'on peut envisager un «principe d'Huygens généralisé» pour tout phénomène qui se laisse traduire par une fonction continue.

Au point de vue mathématique, la théorie montre que la solution de toute équation aux dérivées partielles à quatre variables indépendantes, peut être ramenée, abstraction faite des solutions discontinues, à la solution d'une seule équation du second ordre, qui est l'équation des ondes.

A VIDA COMERCIAL E INDUSTRIAL

PELO ENG. JOSÉ **MENDES LEAL**
PROF. DO I. S. T.

Numa edição, da The Anglo-Portuguese Telephone Co. Ltd, do livro «Como triunfar na vida», recentemente publicado, acha-se o seguinte artigo, que com a devida vénia transcrevemos:

No ramo das actividades industriais e comerciais, aquêles que procuram a valorização das suas capacidades ou das suas disponibilidades podem encontrar actualmente um campo de acção que lhes permite uma boa compensação do seu esfôrço.

Particularmente nas indústrias, renascentes umas no nosso País, em desenvolvimento outras e ainda quando sejam lançadas bastantes outras, novas, que têm verdadeiras possibilidades de êxito, pode considerar-se assegurado um campo de actividade que será remuneradora se as aptidões e a orientação daquêles que nelas colaborem forem bem adaptadas ao condicionalismo do meio e dos mercados a abastecer.

Por seu lado o Estado reconheceu a instante necessidade de desenvolver a actividade industrial do País por forma a reduzir a sua dependência do estrangeiro no que respeita aos produtos que aqui podem normalmente fabricar-se, também com a finalidade de promover que a mais portugueses seja assegurado trabalho e, ainda, com o fim de defender os capitais investidos nos estabelecimentos industriais nacionais dos ataques provenientes duma concorrência exagerada, já interna já da produção externa.

Embora moderadamente, procurando compensar a perturbação nos valores que as conseqüências da crise vieram ocasionar, promulgou uma série de medidas de defesa das indústrias e dos seus trabalhadores, ou que indirectamente concorrem para um equilíbrio cujos benefícios começam já a colher-se.

Contam-se entre as disposições publicadas algumas de excepcional interêsse, como são as chamadas de condicionamento industrial, a de defesa dos produtos nacionais, as contidas nas disposições preliminares da Pauta das Alfândegas — preventivas do *dumping* — e, finalmente, a legislação geral do trabalho e a organização corporativa, abrangendo indústria e comércio.

Seguindo-se estas disposições, coincidindo quási com o renascimento espontâneo que se vem verificando desde alguns anos e que constitue um período notável de renovação e expansão das actividades industriais, parece poder afirmar-se que êsse progresso será seguro.

Êste ponto é de primeira importância na questão da estabilidade dos valores investidos e na continuïdade dos resultados obtidos pelas explorações já realizadas e a realizar.

Notam-se nêste assunto diferenças essenciais entre o condicionalismo dos meios destinados a assegurar o triunfo nos ramos industrial e comercial.

O primeiro, muito mais complexo, inclue quási inteiramente os problemas do segundo; somam-se-lhe porém os problemas que derivam da produção.

Pela importância dos capitais imobilizados, dificilmente realizáveis e, mesmo quando o possam ser, só recuperáveis normalmente a longo prazo e com forte prejuízo, pela baixa de rendimento e elevado encargo que ocasiona qualquer modificação na cadência estabelecida, a actividade industrial requere para triunfar — no caso geral — uma seqüência, uma estabilidade, uma continuïdade consideràvelmente maiores do que as que exige o comércio.

Daqui a necessidade de realizar estudos e investigações muito cuidadosos e meticulosos, ao encarar o lançamento de qualquer forma

de produção industrial. Estudo é êste tornado muito difícil pela contingência que existe no cálculo dos preços do custo, designadamente do quantitativo dos gastos gerais directos e indirectos que em tantos casos constituem um dos encargos mais consideráveis destas emprêsas.

O estudo dos mercados possíveis, do seu provável consumo e a dedução da capacidade de produção a instalar para obter um rendimento industrial interessante, em presença do rendimento comercial computado, tomando na devida consideração, sem optimismo, as condições da concorrência do momento e as que se possam prever nos tempos próximos, é dos problemas mais delicados a resolver mas cuja solução, quanto possível exacta, se torna necessário procurar, para evitar o risco de prejuízos consideráveis.

São hoje mais raros felizmente os casos de instalações precipitadamente feitas, sem os estudos de previsão necessários, em que se investiram e imobilizaram elevados capitais a que o condicionalismo do meio não permitia remuneração satisfatória.

* * *

A primeira condição para triunfar pela indústria é pois o estabelecimento de um programa de produção cuja vitalidade técnica e comercial esteja assegurada.

Importa, para que êsse programa ofereça garantia, que tenham sido realizados estudos meticulosos de determinação da capacidade de absorção do mercado para os preços correntes de venda dos produtos que se pretende fabricar, tomando em consideração a concorrência existente, quer interna quer externa.

A segunda consistirá no estabelecimento dum programa de instalações proporcionando a produção ao consumo que o mercado pode assegurar, por forma que essa produção possa ser efectuada com o máximo rendimento industrial e financeiro.

O estudo destas condições requere investigações de carácter técnico aprofundadas. São igualmente de recear neste campo as orientações extremas.

As instalações desmedidas ou comportando material de preço inútilmente elevado ou ainda de capacidade de trabalho super-abundante — assim como aquelas que não dão a necessária harmonia e equilíbrio às diferentes fases do fabrico, são fontes de encargos improdutivos, já de fabricação, já financeiros, que oneram fortemente os preços de custo, tornando inviável muitas vezes a exploração.

As instalações realizadas com insuficiência de material, umas vezes com máquinas velhas, de fraco rendimento, de trabalho imperfeito — outras adoptando soluções provisórias, de resultados deficientes, baratas de instalação mas caras, carissimas de funcionamento, pela lentidão da sua marcha, pela inferior qualidade do que produzem — são para recear nos seus resultados práticos.

Efeitos semelhantes podem resultar do lançamento de emprêsas com capital insuficiente. Os encargos dos pagamentos a longo prazo, os juros das importâncias emprestadas por terceiros, etc., oneram fortemente o custo dos produtos fabricados — sem falar em que, sobretudo nos começos da sua exploração, mas, até mais tarde — as emprêsas estão sujeitas à repercussão de altas e baixas no mercado de consumo, no das matérias primas, etc. Ora tais repercussões, podem dar origem a prejuízos transitórios a que uma emprêsa com capital insuficiente e encargos pesados não pode muitas vezes resistir.

Outros factos que condicionam notàvelmente o rendimento económico da produção são as características e a disposição do equipamento e outros elementos da produção bem como da localização dos estabelecimentos industriais.

A concordância harmónica da disposição do material e elementos de produção com o diagrama de fabrico é uma circunstância que importa realizar com o mais meticuloso cuidado.

As áreas parciais, as distâncias entre os diferentes elementos do fabrico, etc., carecem de ser determinadas com rigor e adoptadas com a maior exactidão possível, para que o andamento do fabrico se faça com o máximo de simplificação, e facilidade de contrôle e com o mínimo de encargo.

Um outro factor importantíssimo do rendimento económico das instalações industriais é a boa organização dos serviços de compras de matérias primas e subsidiárias para o fabrico.

Importa que êste serviço disponha de dados completos e exactos relativos à situação do

mercado no que respeita a essas matérias — designadamente às variações de preços, qualidade e quantidades e o conhecimento das quantidades que em prazos determinados serão necessárias.

O preço de aquisição, é uma questão fundamental — particularmente nas emprêsas cuja produção sofre uma forte concorrência e naquelas em que no custo dos produtos predomina o custo das matérias primas.

*
* *

Um dos factores que mais poderosamente contribuem para assegurar o êxito a qualquer exploração industrial ou comercial é a boa organização dos serviços contabilistas de fiscalização e contrôle.

O guiar-se apenas pelos balanços e fora dêles apenas pelo sentimento, numa época como a actual, de variações rápidas das condições económicas e financeiras do meio, é correr riscos gravíssimos.

O contrôle financeiro, comercial e técnico deve ser constante e minucioso. Indispensável se torna para isso que sejam estabelecidos por organização adequada, com grande freqüência os respectivos indicadores e que êstes sejam constantemente consultados e comparados.

Só assim se torna possível às administrações e às gerências orientar a exploração no caminho mais seguro e adoptar as fórmulas de melhor rendimento, sem calcar caminho errado evitando prejuízos escusados.

*
* *

Resumindo estas ligeiras considerações, o lançamento ou o desenvolvimento de actividades industriais carece, para que possa assegurar as necessárias condições de rendimento, para que triunfe, que se tenha efectuado um estudo minucioso comportando as previsões e a partir delas uma sistematização; e, que, no que respeita às instalações, se defina lògicamente uma organização técnica e administrativa e formas de contrôle e fiscalização eficientes — e que êsse estudo seja efectuado sem precipitação optimista, sob dados seguros, por entidade competente.

*
* *

Apreciado o aspecto da indústria em si e do industrial, alguma coisa falta dizer das condições a que deve satisfazer e dos meios de que deve servir-se o empregado que na indústria e no comércio exerce a sua actividade, para triunfar pela sua valorização, isto é, conquistar uma situação mais elevada e mais remuneradora.

Trabalhos vastos tem sido escritos por homens de ciência e observadores notáveis, sôbre esta matéria.

Impossível é, nestas notas ligeiras, enumerar sequer, todos os lados dêste problema. Alguns pontos porém, entre os mais importantes podem ser destacados.

A primeira condição é naturalmente que o indivíduo disponha da aptidão necessária para o género de trabalho a que pretende dedicar-se.

Neste mesmo volume se encontra um competentíssimo estudo acêrca dêste ponto. Descabido seria tratá-lo nesta altura.

Uma outra condição necessária é que êsse indivíduo possua uma preparação técnica moderna, com suficiente desenvolvimento.

Como há pouco se escrevia na *Indústria Portuguesa*, há muito que não estamos na época em que na indústria, então pouco mais do que manual, era excelente o processo de transmitir a outros operários pelo ensino resultante do contacto com operários antigos e mestres, os conhecimentos profissionais. A técnica da indústria estava numa fase lentamente progressiva e os processos técnicos requeriam mais habilidade e experiência da parte do operário do que conhecimentos adquiríveis por estudo.

A complicação, a delicadeza da aparelhagem e da técnica modernas, o seu processo científico de operar, exigem dos operários que manobram aquela aparelhagem e dos mestres e contra-mestres que os dirigem, para que o façam convenientemente, uma preparação geral e tecnologia muito difícil e morosa de conseguir por outro meio que não seja a escola industrial.

De resto a evolução rápida que há anos se vem verificando no material e nos processos de produção não permitem já o processo de aprendizagem que consiste em aprender a

repetir o que outros mais antigos sabem fazer. E tanto assim é que bastantes são os operários, alguns já antigos, que freqüentam os cursos nocturnos daquelas escolas.

É certo que em países fortemente industrializados e dotados de vastos mercados o progresso mecânico conduziu já ao semi-automatismo com a produção em série contínua; é certo que a condução dêste material, quási automático, não requere preparação profissional adequada (salvo a duma pequena minoria); mais certo é, porém, que tal sistema de fabrico não pode adaptar-se ao nosso país pelos mercados restritos de que dispõe e por outras circunstâncias que seria ocioso expor aqui.

Da mesma forma, as actividades comerciais, pela complicação crescente da sua técnica, pela vastidão e variedade dos mercados abraçados, pela complexidade do seu condicionalismo, deixaram há muito de apresentar aquela forma simples que permitia que fàcilmente triunfassem indivíduos apenas dotados de vontade de trabalhar e seriedade.

Para concluir, uma última condição se citará ainda, que se afigura necessária ao empregado ou ao operário para se valorizar e triunfar: o amor do seu trabalho e o desejo de cada dia efectuá-lo com maior perfeição. Empregado e operário devem procurar intensificar os seus conhecimentos profissionais e ampliá-los com outros novos, interessando-se pela sua profissão, não se desligando completamente dela cada dia, ao saír da fábrica, do escritório ou do armazém.

Estas ligeiras notas visam a mostrar que dentro do campo das actividades industrial e comercial há possibilidades de valorização para todos aquêles que se lhes dediquem (conscienciosamente) — quer os que as lançam e dirigem, quer para aquêles que em todos os graus contribuem para a sua exploração, quer ainda para os capitais que ali se coloquem.

CONFERÊNCIAS

A convite do Instituto di Cultura Italiana e do Instituto para a Alta Cultura, o Prof. Eng. Girolamo Ippolito, da R. Universidade de Nápoles, realiza no I. S. T., às 21 ½ horas dos dias 27 e 28 de Abril e 1 e 2 de Maio, quatro conferências sôbre:

1) — Il contributo italiano nel campo dell'idraulica. Parte storica. Contributo recente.
2) — La tecnica italiana degli impianti idroelettrici.
3) — La bonifica integralle in Italia.
4) — Le opere idraulico-sanitarie in Italia.

O mesmo professor realizará, na Ordem dos Engenheiros, uma conferência sôbre:

Idraulica e architettura.

Estudo sôbre as águas das praias da Parede

(LABORATÓRIO DE GEOLOGIA)

PELO ENG. CIVIL (I. S. T.) ANTÓNIO M. VASCONCELOS

Considerações gerais

Nas arribas das praias da Parede brotam várias emergências, havendo algumas pequenas obras de captagem.

O regime das águas, como adiante veremos, não justifica grandes obras.

Topografia

A topografia da região é pouco acidentada e, como se trata de terrenos geralmente calcáreos (pequeno coeficiente de escoamento), pouca importância tem. Apenas o vale da ribeira de Caparide poderá ter certo papel na alimentação das formações aquíferas que afloram nas arribas das Praias da Parede.

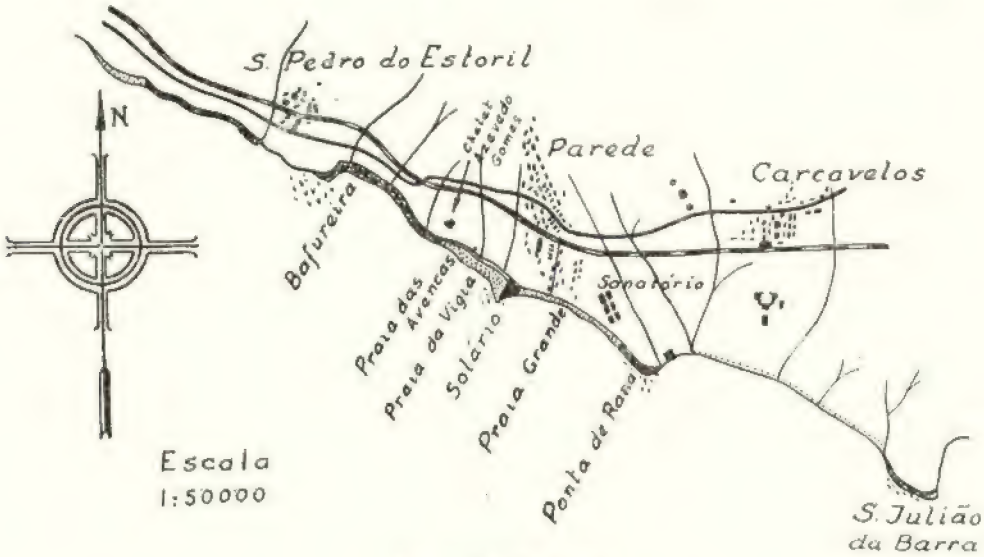


Fig. 1 — Planta geral

Estudamos em especial a zona entre o Solário da Parede e o chalet Azevedo Gomes, isto é as praias da Vigia e das Avencas.

Regime de chuvas

No caso presente as condições geológicas não permitem entrar em consideração com as chuvas, principalmente por se desconhecer a extensão da penetração dos filões a que a água anda ligada, como adiante veremos.

Geologia

As formações cretácicas que afloram nas arribas têm camadas concordantes, inclinadas de 5° para N 70° E. Esta inclinação não é influenciada pela proximidade das arribas.

Há vários acidentes tectónicos e filões na direcção NS.

As camadas são de calcáreos margosos umas mais calcáreas, outras mais argilosas.

Os filões, geralmente de basalto, estão mais ou menos alterados.

junto, compreendidas entre o grez avermelhado da Baforeira e o banco calcáreo com *Orbitolina conoidea*.

Na Carta Geológica dos Arredores de Lis-

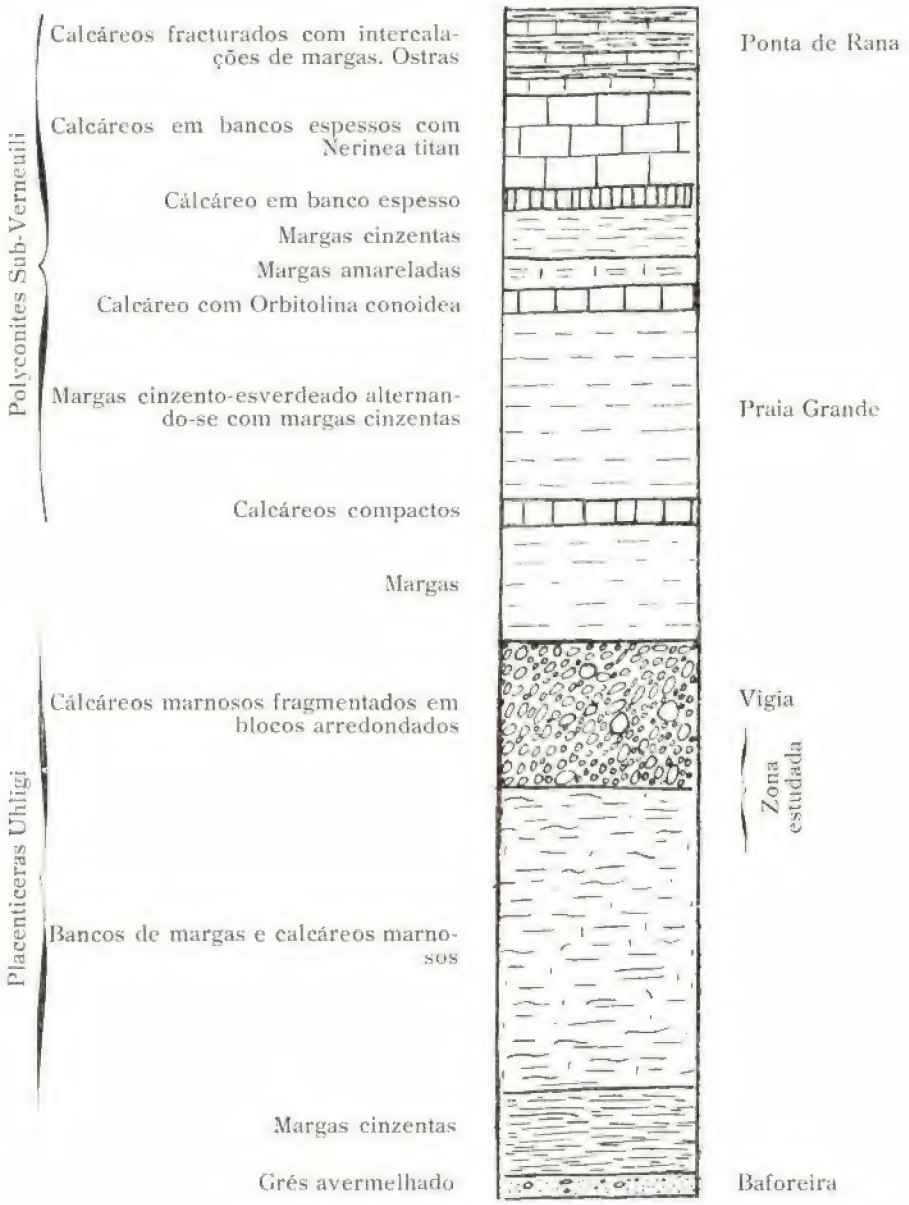


Fig. 2

Segundo P. Choffat [1], na descrição «Da Baforeira ao forte do Junqueiro», trata-se das camadas assinaladas no quadro estratigráfico

boa, 1 : 50.000, fôlha de Cascais, as formações da zona estudada são indicadas no «Cenomaniano (com exclusão das camadas com *Neolobites*)» enão no «Aptiano-Albiano (englobando as camadas com *Orbitolina conoidea*)», Fig. 3 e 4.

[1] P. Choffat — Sur le Systeme Cretacique du Portugal, pág. 39 — 1885.

Fig. 3 — Esbôço da carta geológica

Constatámos no local da Baforeira, que o limite geológico da carta, separando estas duas formações, corresponde à camada de grez avermelhado.

Hidrologia

Na região estudada pode dizer-se que existem 2 formações aquíferas, Fig. 5:

1.ª Os calcáreos marnosos cinzentos, fragmentados em blocos arredondados de cêrca de 30 cm de diâmetro, permeáveis «em grande»..... 2^m
Bed-rock e over-burden: camadas de calcáreo margoso não fendido $0,^m40$

2.ª Calcáreos margosos em leitos estreitos, permeáveis «em grande» pelos planos de estratificação ..... 2^m
Bed-rock e over-burden: camadas de calcáreo margoso mais compactas

Estas formações afloram na costa nos pontos indicados na «Vista» da fig. 6.

Os filões basálticos, sempre mais ou menos alterados, que cortam as camadas numa direcção próxima das suas linhas de nível, têm um papel importante nas águas, quer formando dique, quer formando dreno.

A camada que chamamos 1.ª formação aquífera só apresenta emergências no intervalo dos filões I e II. O filão I funciona como dreno pois é duma rocha fracturada e não alterada. Deve ser bastante extenso, tendo em vista a quantidade de água que fornece (cêrca de 2 l/seg. na Primavera), mas só o conseguimos seguir até uns 60 m da costa.

O filão II, paralelo a I está completamente alterado e transformado em produtos argilosos. Forma um dique que limita a camada aquífera 1.ª.

O filão II deve ser pouco extenso visto que não acusa acumulação de águas a montante (a oeste).

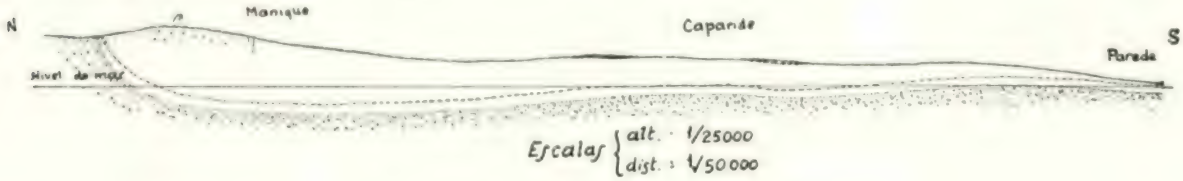


Fig. 4 — Esbôço do corte geológico NS

A 2.ª formação aquífera parece menos influenciada pelos filões. No entanto a falha (?) IV funciona como dreno, dando um caudal de cêrca de 2 l/seg na Primavera.

Captagens existentes

As captagens existentes nas próprias arribas, nos locais indicados na «Vista» da fig. 6 são:

I — Captagem das águas do filão I. (Da 1.ª formação aquífera), Fig. 7:

Caudal { medido na Primavera: 2 l/seg.
no verão — por vezes sêca.

II — Captagens da praia das Avencas. (Da 2.ª formação aquífera).

Fig. 5

Constam de pequenos tanques (pouco menos que 1^{m3}) encostados às arribas em pontos onde o perfil destas apresenta uma reentrância, como nos esquemas juntos. Os tanques foram construidos por baixo das principais ressurgências, Fig. 8.

III — Captagem da Av. dos Príncipes. (Da 2.ª formação aquífera).

Consta duma cavidade de $1^m \times 1^m$ de superfície por $0,^m50$ de altura onde a água se acumula.

Em volta da abertura ($0,^m50 \times 0,^m50$) as arribas são revestidas de alvenaria, Fig. 9.

Aproveitamento das águas

Considerando que:

1.º As águas são provàvelmente inquinadas pois não existe na região um sistema regular de esgotos.

2.º O caudal é fraco no verão.

3.º Está próxima a canalização da água de distribuïção da Câmara Municipal de Cascais.

Seria mais económico e seguro utilizar as águas da canalização da Câmara, não se justificando grandes obras.

A única obra que, pelo seu custo, pode ser viável é a seguinte:

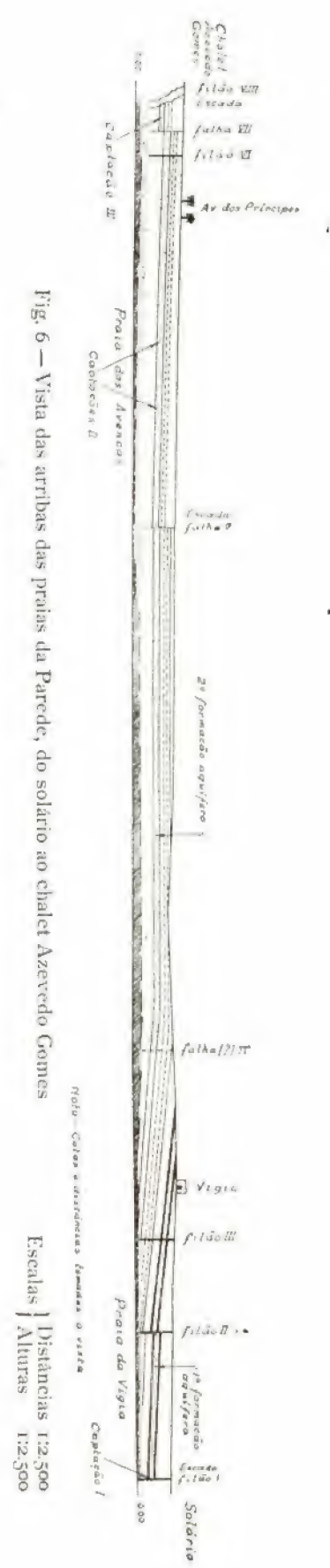


Fig. 6 — Vista das arribas das praias da Parede, do solário ao chalet Azevedo Gomes

CUPRINOL REG. PRODUCTS

Produto para conservar MADEIRA

Contra o caruncho, escaravelho, formiga branca e apodrecimento.

AS VANTAGENS DO CUPRINOL

1 — CUPRINOL evita definitivamente o caruncho, o bicho e a formiga branca.
2 — CUPRINOL é económico.
3 — Pode-se pintar por cima de CUPRINOL.
4 — CUPRINOL evita uma demão de tinta porque serve de primário.
5 — CUPRINOL não repassa o estuque.
6 — CUPRINOL não se deixa arrastar pela água e não se evapora.
7 — CUPRINOL estabiliza a madeira, evitando as suas contracções.
8 — CUPRINOL é inofensivo para as plantas.
9 — CUPRINOL é limpo e inofensivo para a saúde.
10 — CUPRINOL serve para velatura económica para aplicar nos soalhos, antes do encerado.

CUPRINOL já entrou em serviço na

EXPOSIÇÃO HISTÓRICA

DO MUNDO PORTUGUÊS

PROCESSO DE TRATAMENTO

Tratamento de madeiras **Cuprinol** pelo processo de imersão

Caixilho apodrecido

Geral

Cuprinol é fabricado dos sais de zinco e cobre. Êstes sais são levados para o interior da madeira por meio de dissolventes apropriados, que, evaporando, deixam a defesa contra tôdas as formas de apodrecimento e ataque de bicho ou formiga branca.

Cuprinol é fornecido pronto a servir, não devendo ser aquecido ou diluido.

Cuprinol seca ràpidamente : o seu emprêgo não interfere no seguimento da obra.

Cuprinol é fabricado em Verde, Castanho e Incolor, mas o Verde é que é recomendado para uso em madeiramentos estructurais e para o tratamento de carpintaria.

Madeiras Estructurais

A maneira mais económica de tratar as madeiras estructurais é por imersão no próprio sítio da obra. A madeira, depois de serrada e acertada, é imersa durante alguns segundos num tanque tôsco arranjado para êsse fim, contendo o **Cuprinol.** Cuidado no escorrer, pois influi na economia do seu emprêgo.

Tôdas as superfícies recortadas depois da imersão devem ser novamente tratadas com um pincel.

Cuprinol pode também ser aplicado à pistola ou à trincha se fôr preciso.

Um galão de **Cuprinol** cobre cêrca de 50 metros quadrados de madeiras aparelhadas, e cêrca de 30 metros quadrados em madeiras tôscas.

Tratamento de Carpintaria

Nos cadernos de encargos deve-se exigir que os trabalhos de carpintaria (tais como : portas, caixilharia, ombreiras, etc.), sejam protegidas a **Cuprinol.**

Cuprinol em si é uma pintura primária e a defesa da madeira num só processo.

Sendo o custo da mão de obra para o processo de imersão a **Cuprinol** insignificante, e, considerando que alem de defender a madeira substitui a mão d'obra e o material necessário para a primeira demão de tinta a óleo, o emprêgo em carpintaria do **Cuprinol** por imersão não acarreta aumento de custo da obra.

Cuprinol pode ser aplicado na própria fábrica de carpintaria.

Cuprinol deve ser aplicado com fartura em tôdas as espigas, os pontos de perigo onde o apodrecimento começa sempre.

Carpintaria tratada a **Cuprinol** pode ser pintada e envernizada depois de 3 ou 4 dias.

Cuprinol tem uma cobertura de cêrca de 50 metros quadrados em obra de carpintaria, contando com a penetração nas espigas e juntas.

Fabricado e patenteado por CUPRINOL, Ld., Bristol - Inglaterra
Distribuido por JENSON & NICHOLSON, Ld., Londres

Distribuidores exclusivos para Portugal e Colónias

Sociedade Robbialac, Limitada

Rua Nova do Carvalho, 15, 1.º — LISBOA

P R E Ç O S

(O Galão Inglês tem 4,5 litros)

5 Galões	300$00
1 Galão	70$00
1/4 Galão	20$00
1/8 Galão ou Pinta	11$00
1/16 Galão ou 1/2 Pinta	6$00

Esquema das captagens existentes

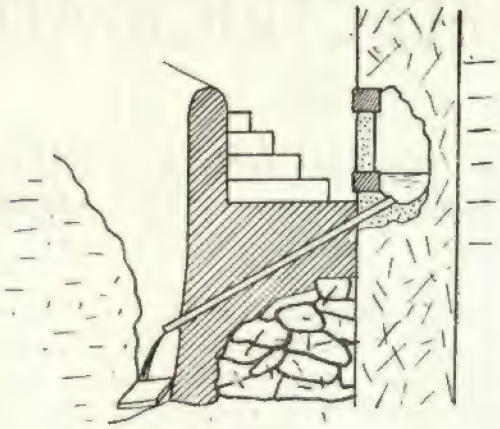


Fig. 7 — Captagem I

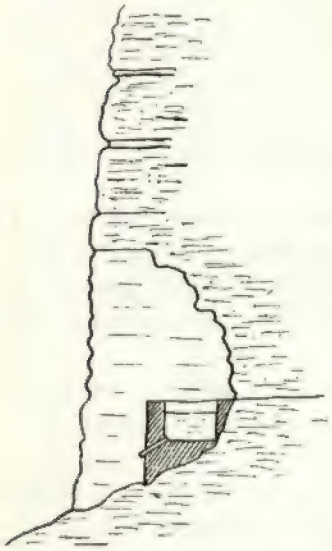


Fig. 8 — Captagem II

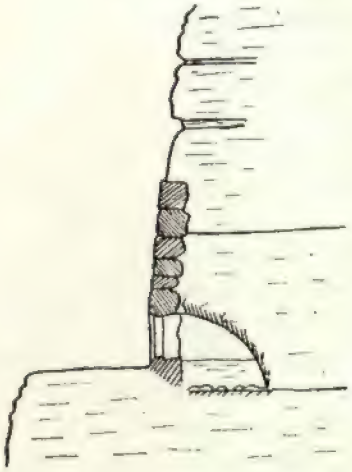


Fig. 9 — Captagem III

Melhoramento das condições de alimentação das captagens do tipo II.

Para melhorar as condições de alimentação dos tanques, ou antes, para aumentar o caudal a recolher nos tanques pode regularizar-se a superfície das arribas, na altura da 2.ª formação aquífera, a montante de cada tanque, de modo a que a água ressurgindo, não corra verticalmente para a areia da praia, como acontece actualmente, mas sim seja interceptada pelo bed-rock da formação aquífera onde se praticará um sulco que conduzirá a água aos tanques.

Conseguia-se assim interessar na alimentação dos tanques muitas dezenas de metros do afloramento da formação aquífera.

Fig. 10 — Estado actual

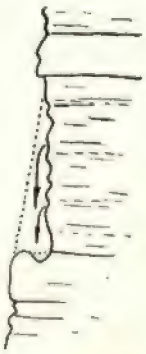


Fig. 11 — Obras propostas

OS PIONEIROS DA ELECTRICIDADE

POR HILÁRIO CRUZ
DO CURSO DE ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA

Não há ramo de actividade científica ou industrial que não se prenda à electricidade, verdadeira fonte inesgotável de energia, sendo portanto interessante conhecer a sua origem e as diferentes descobertas que a conduziram ao desenvolvimento actual.

Desde o século XVII que os seus efeitos foram notados por Otto de Guericke — 1650 — numa máquina de atrito que lhe revelou a repulsão eléctrica e também um fraco clarão, visível na obscuridade.

Mais tarde — 1675 — Newton, vendo a atracção produzir-se através do vidro, sugeriu logo a hipótese da electricidade poder provir de uma vibração etérea.

Em 1729, os físicos ingleses Grey e Wehler, depois de vários ensaios, fazem a classificação dos corpos em «bons» e «maus» condutores.

Dufay — 1733 — estabelece a distinção entre as duas electricidades, classificando uma de «vitrea» e a outra de «resinosa».

Em 1746, Musschenbroeck, professor de Física em Leidey (Holanda), apresenta a sua garrafa condensadora, aperfeiçoada depois por Wast on,Bevis e Nollet.

Lecat — 1750 — inventa o electroscópio de fôlhas de ouro.

Franklin — 1751 — pelas suas pesquizas estabelece a teoria dos condensadores, estuda o poder das pontas, demonstra a identidade do raio e da electricidade e constrói o primeiro pára-raios.

Dalibard — 1752 — obtém a electricidade atmosférica.

O fim do século XVIII é assinalado pelos trabalhos de Coulomb, que determina as leis das atracções e das repulsões, e a repartição das cargas eléctricas à superfície dos corpos, de diferentes formas.

O acaso revelou a Galvani, a acção da electricidade sôbre os músculos de um cadáver. Uma rã dissecada agitou as suas patas, sob a influência das descargas eléctricas. Se a electricidade mata, ela é em compensação, capaz de dar momentâneamente a um cadáver as aparências de vida.

Jean Aldini — sobrinho de Galvani — faz experiências sôbre carneiros, coelhos e bois, após a sua morte, e fá-los mover sob a acção eléctrica.

Humbolt galvaniza os peixes e Zanotti os insectos.

É o francês Larrey que faz o primeiro ensaio de galvanismo sôbre o homem.

O Dr. Ure, fêz, em Glasgow, a experiência sôbre o corpo dum assassino, no dia 4 de Novembro de 1818.

Era um homem de 30 anos, muito robusto, e que fôra condenado à fôrca.

Galvanizou os músculos da face. Os cabelos eriçaram-se e as expressões mais disparatadas passaram-se em alguns segundos, sôbre a face exangue. A cólera, a tristeza, o pavor, sucederam-se, misturados de sorrisos hediondos.

Na aurora do século XIX, Alexandre Volta, constrói a primeira pilha constituída de discos, alternadamente de cobre e de zinco, separados por rodelas molhadas em água acidulada.

Carliste e Nicholson — 1800 — decompõem a água pela corrente e Crui Kshank fêz o mesmo para as soluções salinas.

Em 1807, Humphry Davy, decompõe os alcalis e isola o potássio; em 1813, faz saltar a deslumbrante luz do arco.

Hans-Cristian Œrsted, físico dinamarquês, casualmente descobriu que a agulha de uma bússola se desviava quando colocada nas proximidades dum fio de cobre ligado a uma pilha.

Êsse desvio tinha sido já assinalado em 1790, por Romagnosi, que não soube profundar a sua observação.

É em 11 de Setembro de 1820 que a descoberta de Œrsted é conhecida na Academia das Ciências de Paris.

Em 18, Ampére expõe os princípios da electro-dinâmica, e sete dias bastaram para conceber a acção recíproca das correntes, tornar móveis os elementos do circuito eléctrico e realizar os aparelhos susceptíveis de submeter as suas ideias ao contrôle.

Em cada semana, êste sábio fornece novas concepções: telegrafia electro-magnética, acção do magnetismo terrestre sôbre os circuitos móveis, o solenóide e o electro-iman, sendo êste último em colaboração com Arago.

Faraday — 1830 — obtém as correntes induzidas deslocando na proximidade duma bobine, um imam ou um solenóide.

Pixii — 1833 — constrói o primeiro alternador.

Jacobi—1837 — cria a galvanoplastia, logo seguida da douradura e da prateadura galvânica.

Em 1842, o transformador estático é esboçado por Masson e Bréguet e aperfeiçoado por Ruhmkorff em 1850, é proposto por Goulard para o transporte económico da energia a grande distância.

Ideia de talento, pois nós vemos hoje o que então não foi compreendido. A ruina das suas legítimas esperanças conduziu o maravilhoso percursor à loucura.

Aparece-nos depois o telégrafo de agulhas, de Foy e Bréguet, logo substituído pelo de Morse.

Mas como o de Morse é só empregado sôbre linhas pouco carregadas, êste foi substituído primeiro, pelo de Hughes, pôsto em serviço em 1860, e depois pelo de Baudot, uma maravilhosa invenção francesa que data de 1874.

Gaston Planté — 1860 — inventa o acumulador e segue os progressos incessantes do electro-magnetismo.

Surge-nos em 1861 o magneto, conhecido pelo «anel de Gramme».

Êrro deplorável, porque está bem demonstrado que o belga Gramme realizou simplesmente a ideia de um professor italiano de nome Pacinotti.

A descoberta do dinamo de corrente contínua serviu para alimentar as primeiras lâmpadas de Edison, que logo se espalharam sôbre as rêdes de fraco comprimento.

Contudo, a corrente alterna é já preferida para os grandes percursos.

Tímidos ensaios, foram tentados com tensões de um milhar de volts; depois, pouco a pouco, animados pelo bom êxito, os electrotécnicos, chegam a lançar sôbre centenas de quilómetros tensões que causariam admiração aos seus antepassados.

O escocês Graham Bell constrói em 1876 o telefone, modernamente aperfeiçoado devido à introdução do automático.

Em França, êste sistema data de 1910, sòmente para rêdes privadas, bancos, armazéns ou fábricas.

A primeira rêde pública equipada com êste sistema foi a de Nice, que foi inaugurada em 19 de Outubro de 1913. (É curioso notar que Lisboa inaugurou o telefone em 1880, tendo sido uma das primeiras capitais da Europa a fazê-lo).

Modernamente a electricidade invade todos os campos.

Em cada instante, no mundo inteiro, descobre-se uma nova aplicacão e um novo bem é confiado á humanidade.

A fôrça motriz aplicada às mais pesadas máquinas, a iluminação feérica das grandes cidades, o calor dos altos fornos donde saem o alumínio e o aço, as irradiações cada vez menos misteriosas aplicadas à radiologia, à radiotermia, etc.; a T. S. F., pondo em contacto directo dois pontos diametralmente opostos da Terra, difundindo com a velocidade da luz notícias sensacionais, salvando vidas em naufrágios, guiando na bruma e na escuridão navios e aviões, e a televisão transmitindo imagens e fotografias, completando assim a T, S. F., que pode a cada instante e sem perda de tempo, dar no mais remoto lugar da Terra um filme sonoro dum acontecimento em qualquer local; nos mostram com nitidez o valor da electricidade e o que a Humanidade deve aos seus precursores.

Completaram, nos anos lectivos de 1936-37 e 1937-38, a parte escolar dos seus cursos os nossos colegas:

1936-37

ENGENHARIA CIVIL

Alberto Abecassis Manzanares — Praça Duque de Saldanha, 1, 1.º Esq.
Manuel Bravo — Obras da Barragem — Torrão do Alentejo
Luiz Faria e Maia
João Monteiro Conceição — Pôrto de Mós
Emídio Correia Guedes — Idanha-a-Nova
Alberto Saraiva e Sousa — R. Alexandre Herculano, 12, 3.º
Augusto Pereira Bandeira — Companhia dos Caminhos de Ferro de Benguela — Lobito
Vasco Romeu Cambournac — R. Francisco Sanches, 47, 2.º Esq.
Henrique da Silva Leitão — Travessa de Santa Catarina, 9
Tomaz de Sousa Eiró — Av. Combatentes da Grande Guerra, 18, 2.º D. — Algés
Alberto de Azevedo Zuquete — Leiria
Ernâni Rocha — Travessa da Era, 4, 2.º
António de Carvalho Seabra — R. dos Fanqueiros, 120, 3.º
Vasco Mavigné de Sousa Vaz — R. do Arco a S. Mamede, 22, 1.º
António Marinho Falcão — Vila Margarida — Cruz Quebrada
António de Sousa Ramos da Costa — Av. Elias Garcia, 103, r/c Esq.
João Braz de Oliveira — Av. António Augusto de Aguiar, 187, 2.º
Maria Amélia Ferreira Chaves — Av. Gomes Pereira, 97, 1.º Esq.
José Augusto dos Santos — Pôrto de Peniche
José Manuel da Silva Leitão — R. Santa Catarina, 9
Fernando O'Neill — R. das Flores, 59
António Nobre Castilho — Travessa do Forno do Maldonado, 16, 2.º
Carlos Saragga Biscaya — Av. Combatentes da Grande Guerra, 88 — Algés
João da Conceição Felipe — Companhia dos Caminhos de Ferro de Lourenço Marques
Manuel Francisco Camello — R. Braancamp, 40, 1.º Esq.
Manuel Matos Viegas — R. S. Felix, 52, 1.º Esq.
Jorge Amaral Coimbra — Castanheira de Pêra

ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA

Jaime Amâncio Cruz — Companhia dos Caminhos de Ferro de Lourenço Marques
João da Silva Ruivo
José Gonçalves Gomes — R. de Arroios, 70
Fernando Castelo Branco — R. das Trinas, G. S. L., 4.º D.

ENGENHARIA MECÂNICA

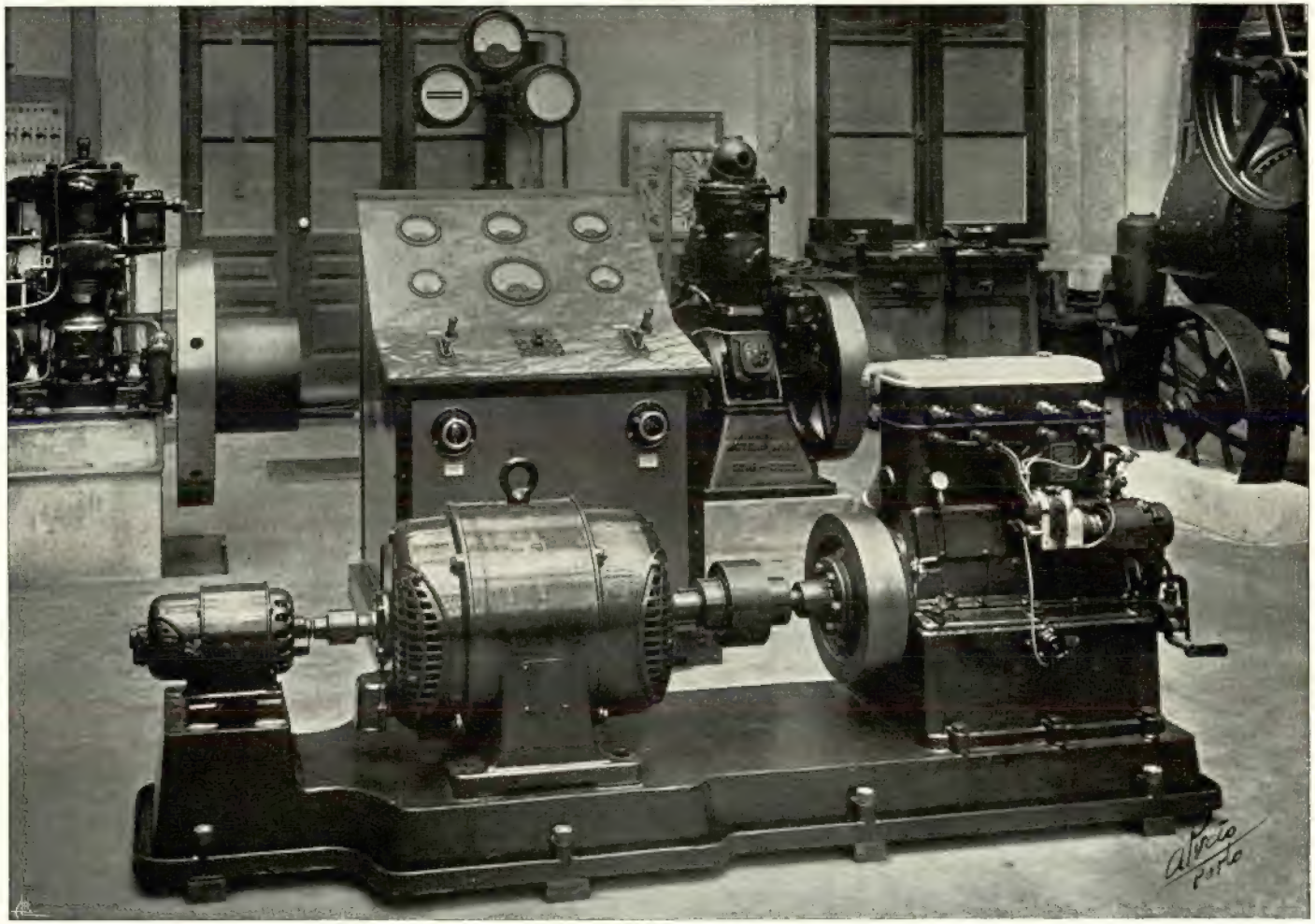
Basílio Caeiro da Mata — Campo dos Mártires da Pátria, 69

JAYME DA COSTA, L.DA

ENGENHEIROS

LISBOA PORTO

ASEA



PENTA

UNIVERSIDADE DO PÔRTO

Laboratório de máquinas térmicas da Faculdade de Engenharia
Grupo electrogénio de 30 cavalos "Penta — Asea"

TIPOGRAFIA PÔRTO MÉDICO, LTDA — PRAÇA DA BATALHA, 12-A-PÔRTO

JAYME DA COSTA, L.DA

ENGENHEIROS

PORTO
PRAÇA DA BATALHA, 12

LISBOA
RUA DOS CORREEIROS, 14

REPRESENTANTES DAS FIRMAS

ALLMÄNNA SVENSKA ELEKTRISKA A.B. **(ASEA)**, VÉSTERAS, SUÉCIA

Motores e geradores de corrente contínua e alterna, transformadores, aparelhagem de alta e de baixa tensão. Ascensores, monta-cargas e gruas. Máquinas eléctricas especiais para as indústrias de fiação, tecelagem, papel, etc. Electrificação completa de fábricas, caminhos de ferro, etc.

SVENSKA TURBINFABRIKS A.B. LJUNGSTRÖM, FINSPONG, SUÉCIA

Turbinas a vapor **STAL.**

AKTIEBOLAGET ATLAS DIESEL, ESTOCOLMO, SUÉCIA

Motores a óleos pesados estacionários e marítimos **POLAR.**
Compressores e ferramentas pneumáticas **ATLAS.**

AKTIEBOLAGET PENTAVERKEN, SKÖVDE, SUÉCIA

Motores marítimos **PENTA** a gasolina, petróleo e óleo. Moto-bombas, grupos electrogéneos.

LANDIS & GYR S.A., ZUG, SUISSA

Contadores eléctricos e aparelhos derivados, relógios e auto-interruptores.

GEBR. RITZ & SCHWEIZER, SCHWÄB, GMÜND, ALEMANHA

Bombas centrífugas, de alta e baixa pressão.

BAMFORDS, LTD., UTTOXETER, INGLATERRA

Motores Diesel de pequenas potências, motores a gasolina e petróleo.

SANDVIKENS JERNVERKS AKTIEBOLAG, SANDVIKEN, SUÉCIA

Aços para tôdas as aplicações.

LOUIS BRENTA, BRUXELAS, BÉLGICA

Serras de fita para trabalhar madeira, com e sem chariot.

JEAN VICAN, CASTELJALOUX, FRANÇA

Máquinas para trabalhar madeira.

AKTIEBOLAGET BALTIC, ESTOCOLMO, SUÉCIA

Desnatadeiras, batedeiras, máquinas para o tratamento do leite.

BERLIN-ANHALTISCHE MASCHINENBAU, A. G., DESSAU, ALEMANHA **(BAMAG).**

Materiais para transmissões, aparelhos diferenciais eléctricos, tensores de correia.

BERLINER MASCHINENBAU-A. G. (SCHWARTZKOPFF), BERLIM, ALEMANHA

Locomotivas a vapor e a óleo, material para caminhos de ferro.

ENGENHARIA QUÍMICO-INDUSTRIAL

Arnaldo de Jesus Terrível — R. Almirante Reis, 44, 1.º — Barreiro
Luiz Monteiro Forte — R. do Salitre, 147, 2.º

1937-38

ENGENHARIA CIVIL

Manuel Coelho Mendes da Rocha — R. Visconde Santarém, 14, 1.º D.
José Gomes Alvarez — Estrada de Benfica, 107, 1.º D.
Luiz de Guimarãis Lobato — R. das Janelas Verdes, 32, 1.º
Alexandre Ferreira Chaves — Av. Marquês de Tomar, 24, 4.º Esq.
António da Cunha e Sá Vasconcelos — R. Santa Ana à Lapa, 22
Félix do Amaral Júnior — Direcção de Estradas do Funchal
Ciro de Oliveira Pinto — R. Heliodoro Salgado, 13, 4.º
Fernando Barreiros Maymone — R. Vítor Bastos, 60, 1.º
Fernando Pereira Sequeira — Av. João Crisóstomo, 134, 2.º Esq.
Artur Rebelo de Melo — R. dos Fanqueiros, 101, 2.º
José Gonçalves Figueira — R. Tomaz Ribeiro, 93, r/c D.
José de Oliveira e Sousa — Av. da República, 23, r/c
Fernando Ferreira Chaves — Av. Gomes Pereira, 97, 1.º Esq.
Adriano Vaz Pinto — R. António Cândido, 12
Mário Correia da Costa — R. Passos Manuel, 26, 1.º
Alexandre Mesnier Machado — Av. da República, 46-A, cave
Jorge Coutinho Jor — R. Marquês da Fronteira, 106
Vasco da Mota Marques Leite — R. Gomes Freire, 87, 4.º
António da Costa Antunes — R. Nova do Almada, 11, 4.º D.
Luiz Longle de Carvalho — R. Rosa Araújo, 30, 3.º
António Ferreira — Casa Pia de Lisboa
Tito Lívio da Cruz Esteves — Av. Rovisco Pais, 8, 1.º
Paulo Paiva Ricou — Av. da Liberdade, 222, r/c
Ramiro Bastos Gonçalves — R. Almeida e Sousa, 47, r/c Esq.

ENGENHARIA ELECTROTÉCNICA

José M. Pereira Athayde — Metalurgica Alentejana — Beja
Carlos Domingos — Travessa do Jerónimo, 10, 1.º
António Pereira Marques — Fábrica de Porcelana da Vista Alegre — Ílhavo
Manuel de Andrade e Sousa — R. S. Felipe de Nery, 70

ENGENHARIA MECÂNICA

Alexandre Vasconcelos Matias — Av. da Bélgica — Barreiro

ENGENHARIA QUÍMICO-INDUSTRIAL

Jaime Antunes Pereira — Fábrica de Porcelana da Vista Alegre — Ílhavo

---

Festa de despedida dos novos engenheiros

Os alunos do Instituto Superior Técnico, que terminam o curso êste ano, realizam o seu baile de despedida no dia 6 de Maio.

Os pedidos de bilhetes podem ser feitos pelo telefone 49144, linha 50.

DO MUNDO TÉCNICO

Uma locomotiva eléctrica de grande velocidade

Para estabelecer um tipo de material moderno que permita tirar tôdas as vantagens da tracção eléctrica e, especialmente, assegurar em muito melhores condições o tráfego de passageiros nas suas linhas de montanha, electrificadas últimamente, a Companhia de Caminhos de Ferro de Paris a Orléans, que em 1937, passou a ser a região sudoeste da S. N. C. F., encomendou quatro máquinas de ensaio a construtores diferentes.

Tôdas estas locomotivas são do tipo 2 D 2, isto é, com quatro eixos entre duas bogies motoras de dois eixos, e, têm um pêso aderente de 80 toneladas.

Uma delas, a locomotiva E 703, apresenta as seguintes características:

Comprimento entre tampões	17,m180
Embazamento rígido	6,m060
Embazamento total	14,m400
Diâmetro das rodas motoras	1,m750
Pêso aderente	80 ton.
Pêso total	140 ton.

Regime a 1.500 V para um aquecimento de 120 graus centigrados	Contínuo		Unihorário	
	min.	max.	min.	max.
Velocidade km/h	89	125	85	117
Esfôrço total nos rastos kg.	12.900	9.200	14.600	10.600
Potência total nos rastos cv.	4.250		4.600	

Corresponde ao programa comum, imposto às quatro máquinas, cujos dados fundamentais são os seguintes:

— rebocar um combóio de passageiros de 800 toneladas à velocidade comercial de 105 km/h aproximadamente nos perfis em patamar da rêde;

— rebocar combóios de passageiros de 750 toneladas entre Chateauroux e Brive à velocidade comercial de 80 km/h. Esta linha apresenta, entre Limoges e Brive, extensas rampas de 10 mm/m e, numerosas curvas.

A velocidade devia poder atingir 140 km/h em certas secções, e, os Caminhos de Ferro de P. O. tinham insistido, especialmente, para que fôssem evitadas as patinagens a grande velocidade.

A máquina e, especialmente, o seu reóstato de arranque, deviam ser capazes de mover um combóio de 750 toneladas na rampa mais comprida do percurso, com paragem em todos os semáforos.

O percurso mínimo, antes da primeira revisão geral, foi fixado em 150.000 km.

Além disso, foi previsto o travamento eléctrico por recuperação; êste tem grande importância na descida das extensas rampas de 10 mm/m existentes no percurso.

Por outro lado, a locomotiva E 703 teve que satisfazer a certas condições suplementares mais gerais.

O pêso dos combóios rebocados é muito variável, estando compreendido na prática entre 200 e 950 toneladas, e, além disso, os horários acelerados obrigam a manter a velocidade constante e, tão perfeitamente quanto possível, na vizinhança da velocidade máxima permitida pela via.

Estes dados impõem grande flexibilidade de condução.

A conservação da via e da locomotiva e confôrto do condutor, importante em trajectos longos, obrigam a uma boa estabilidade a grande velocidade.

É, portanto, obrigatório que a transmissão do esfôrço não traga à suspensão nenhuma perturbação e que os motores, por causa do seu pêso, estejam completamente suspensos.

Pôsto assim o problema, foi resolvido na E. 703, de concepção e fabricação inteiramente francesas, pelo emprêgo de dois motores triplos, cada um de três motores elementares a meia tensão na mesma carcassa, os quais transmitem a sua potência a dois eixos motores por engrenagens e acoplamento de veios ôcos e tirantes.

Com êstes seis motores elementares, as três combinações efectuáveis compreendem: três grupos de dois, dois grupos de três e, um grupo de seis motores em série.

A grande flexibilidade conseguida por estas com-

binações, deve-se ao facto fundamental de que com um combóio e num perfil dados, a potência disponível e a velocidade no acoplamento intermédio são dois terços das que correspondem ao agrupamento paralelo.

Na prática, a flexibilidade da locomotiva 703, traduz-se, na tracção, pela possibilidade de empregar com frequência o agrupamento intermédio para rebocar combóios de 250 a 800 toneladas em perfis fáceis, com velocidades que oscilam entre 85 e 120 Km, sem qualquer limitação de duração imposta pelo aquecimento dos motores.

A regulação da velocidade faz-se, actuando ùnicamente sôbre o manípulo de regulação do campo. É, portanto, muito fácil manter o combóio exactamente na velocidade máxima.

Em recuperação, o agrupamento em paralelo não é empregado; os agrupamentos série-paralelo e série chegam para tôdas as hipóteses de exploração.

Na prática, sòmente se utiliza o agrupamento série-paralelo quando se pretende, pela simples regulação da excitação dos motores, descer rampas de 10 mm/m a qualquer velocidade compreendida entre 65 e 140 Km/h.

Dêste modo, a condução é incomparàvelmente mais fácil do que com freio de ar e o condutor é incitado a servir-se com frequência do freio por recuperação. O consumo de energia e os gastos de manutenção deminuem.

Por outro lado, os motores triplos prestam-se muito pela sua própria constituição á supressão das patinagens a grande velocidade.

O induzido de cada motor elementar ataca uma roda dentada. As rodas extremas elásticas conduzem, cada uma delas, um eixo por um veio ôco e uma transmissão por tirantes. São ligadas entre si em rotação pela roda dentada intermédia rígida, que encaixa exactamente no carrêto do induzido correspondente e nas duas rodas dentadas extrêmas. Os eixos estão assim ligados elásticamente aos pares.

Três particularidades desta construção concorrem para melhorar a aderência a grande velocidade:

— o agrupamento dois a dois dos eixos que, a tôda a velocidade, permite ao esfôrço que se translade dum eixo para o outro, se a aderência é acidentalmente má num dos dois.

—a elasticidade da transmissão que reparte igualmente os esforços nos rastos.

—aumento favorável da inércia das massas girantes ligadas a um eixo motor. Com efeito, a grande velocidade, a experiência mostrou que não se podia dar escorregamento a não ser que no ponto de contacto, a velocidade relativa, entre a roda e o carril, atingisse um valor suficiente. O aumento de inércia impede que esta velocidade seja atingida ràpidamente. O risco de faltas locais de aderência causarem patinagem está portanto reduzido.

Estas concepções foram verificadas na prática e as medições feitas durante os ensaios mostraram que o coeficiente de aderência obtido, sem lançamento de areia, atinge correntemente 22,5 % a 70 Km e 17 % a 105 Km. A aderência dos eixos de comando individual não ultrapassa 12 a 13 % nas mesmas condições.

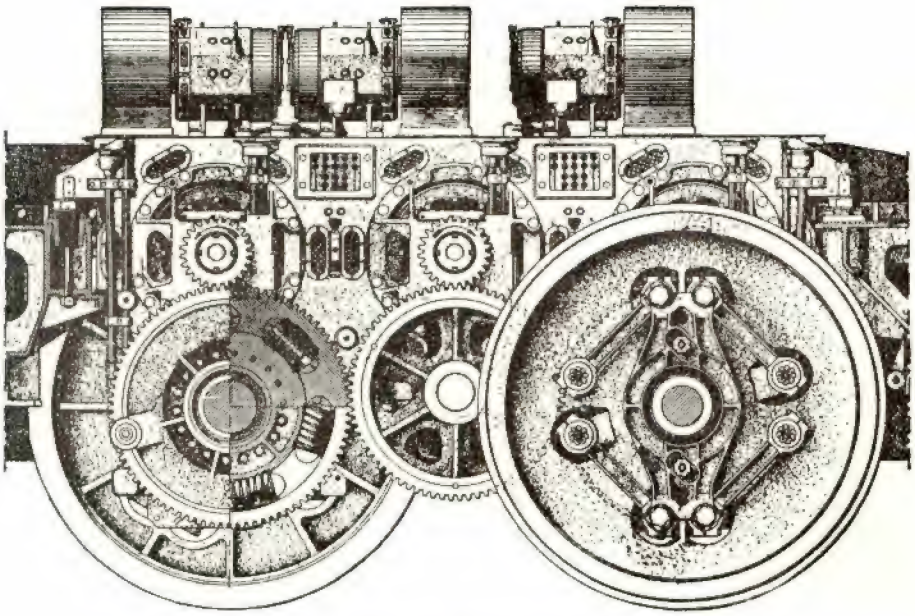
A bôa estabilidade foi obtida em especial, pelo emprêgo de acoplamentos de tirantes e de bogies de movimento angular e transversal, do tipo único da região sudoeste.

Os acoplamentos de tirantes não dão nenhuma reacção vertical susceptível de perturbar a suspensão vertical nem nenhum aumento do período de impacto.

Estes acoplamentos são dum princípio conhecido ha muito, mas as numerosas articulações impossíveis de lubrificar pràticamente foram sempre pontos frágeis nas anteriores realizações.

O emprêgo de «Silent Blocs», duma marca francêsa, permitiram á locomotiva percorrer sem nenhum acidente mais de 360.000 Km.

Em serviço, a locomotiva corresponde largamente ás previsões. Fazem-se sem acidentes percursos men-



Motor triplo, com os seus eixos, mas sem o carter das engrenagens

sais que vão até 24.270 Km, com percursos diários de 1.200 Km, o tráfego mensal correspondente atinge 11.000.000 de ton. Km rebocadas. Ensaios bem sucedidos de circulação a grande velocidade, durante os quais foi atingida a velocidade de 153 Km, efectuaram-se pouco antes da primeira revisão geral que foi feita por ocasião do primeiro torneamento dos aros, depois dum percurso de 213.000 Km, muito superior ao mínimo impôsto de 150.000 Km.

A locomotiva estava perfeitamente em estado de continuar o serviço.

Actualmente a máquina continua o seu serviço normal nas mesmas condições.

(Do Instituto Francês em Portugal)

A próxima sessão da Conferência Internacional das Grandes Rêdes Eléctricas

(C. I. G. R. E.)

A 10.ª sessão da C. I. G. R. E. (Conferência Internacional das Grandes Rêdes Eléctricas) terá lugar em Paris, desde quinta-feira 29 de Junho até sábado 8 de Julho, próximos. Seguir-se-á a 9 congressos precedentes que têm sido mantidos regularmente desde 1921 de dois em dois anos, e que têm permitido trazer em dia sob o ponto de vista periódico todos os grandes problemas da electrotecnia.

Esta conferência oferecerá aos técnicos a ocasião de encontrar o que êles sempre procuram por tôda a parte, isto é, o meio prático de conhecer e de discutir as novidades, — de escolher entre o que é decididamente bom, medíocre ou mau, — de classificar e de registar sòmente os verdadeiros progressos.

A sessão de 1939 estudará especialmente, em vista dos progressos mais recentes:

—A construção e o serviço de máquinas e aparelhos utilizados para a produção, transformação e corte de correntes eléctricas.

—A construção, o isolamento e a conservação das linhas aéreas e subterrâneas.

—A exploração, protecção e a interligação das rêdes.

110 relatórios, provenientes de 20 países e das 5 partes do mundo serão lá apresentados seguindo-se a sua discussão durante os 9 dias de trabalho, que reünirão alguns dos especialistas mais eminentes de todos os países.

Lembramos que a precedente sessão, em 1937, reüniu 1.175 participantes vindos de 46 países diferentes de 5 continentes, e que 27 governos de 8 grandes associações internacionais lá se tinham feito representar por delegados oficiais.

A participação no Congresso é permitida aos electrotécnicos do mundo inteiro, qualquer que seja a sua especialidade; aproveitando mais aquêles que falarem o alemão, inglês, francês e italiano.

Para mais informações, dirigir-se ao Secretariado Geral da C. I. G. R. E., Avenida Marceau, 54, Paris.

NOTAS BIBLIOGRÁFICAS

Comment souder 29 métaux

Par Chas. H. JENNINGS

Traduit sur la deuxième édition américaine

par J. DOUCET

Lib. Polytechnique Ch. Béranger — 120 pg. — 55 frs.

O rápido desenvolvimento tomado pelo uso da soldadura eléctrica por arco e a multiplicação das diversas espécies de ligas exigem um conhecimento perfeito das condições de emprêgo da soldadura por arco e das suas características.

Para se adquirir êsse conhecimento especial, há que estabelecer um programa de investigações, cuja realização seja levada a efeito com o fim não só de se verificarem e estabelecerem os aspectos teóricos e práticos da soldadura por arco, mas ainda de se determinarem as melhores formas de ligações e de construção, assim como os melhores materiais para os usos a que se destinem.

Desde o aparecimento da soldadura por arco que a *Sociedade Westinghouse,* onde o Eng. C. H. Jennings, além de dirigir a execução da soldadura nas várias oficinas, é encarregado das investigações sôbre a soldadura por arco, tomou para si uma tal linha de conduta. A realização do seu programa trouxe já numerosos progressos ao emprêgo da soldadura por arco e dos grupos de soldadura. Deve-se-lhe também uma grande documentação sôbre a soldadura, a soldabilidade de diversos materiais, os tipos de electrodos e as densidades de corrente, visando o fim de se obterem os melhores resultados; os tratamentos térmicos, tenacidade e propriedades das soldaduras, enfim uma enorme quantidade de dados práticos diversos.

«Como soldar 29 metais» é um tratado prático sôbre a soldadura por arco. Utilizada conscienciosamente, esta obra será de grande utilidade para quantos operem com soldadura, porque permitirá simplificar e melhorar os processos de soldadura dos metais e ligas actuais.

O Ensino Profissional em Ponta Delgada

Comunicação apresentada ao 1.º Congresso Açoreano em 1938

por MANUEL DE BARROS

(Prof. do Ensino Primário)

Recebemos êste valioso trabalho, do maior interêsse para o desenvolvimento do ensino técnico nos Açôres. Agradecendo a transcrição de algumas passagens do artigo do Prof. Doutor Bensaude, publicado no n.º 88 da «Técnica», associamo-nos às merecidas e elogiosas palavras feitas ao ilustre professor, fundador e primeiro director desta Escola.

C. A.

PUBLICAÇÕES RECEBIDAS

Esposés Des Motifs Précédant Le Décret Qui A Aprouvé Le Budget Pour L'Année Financière — Oliveira Salazar, Ministre des Finances, Lisbonne, 1939.

Teses Apresentadas por Pinheiro Correia ao I Congresso Nacional dos Transportes — Aero-Club de Leiria, 1939.

Algodão — Junta de Exportação do Algodão Colonial, Delegação em Angola.

Les Turbines «Tourbillon» — Ateliers «Neyret-Beylier et Piccard — Pictet» — Grenoble.

Les Partiteurs de Débit — idem.

Le Rôle du Nickel et de ses Alliages dans la Construction du Matériel Résistant à la Corrosion — F. Renaud, Chimie et Industrie, Paris.

Actualités Scientifiques Et Industrielles

Hermann et Cie. — Paris

634 — **Propulseurs et Amortisseurs de Chocs chez les Animaux** — E. Oehmichen.

584 — **La Sécurité Aérienne, Animaux et Machines** — E. Oehmichen.

653 — **Mésure des Temps, Vitesses, Débits** — Pierre Fleury.

654 — **Application de la Méthode du Champ Self-Consistant aux Noyaux Atomiques** — M. Matricon.

655 — **The Determination of the Mechanism of Photochemical Reactions** — Philip A. Leighton.

656 — **The Photochemistry of the Halogens** — G. K. Rollefson.

658 — **L'Activité Electrique de l'Ecorce Cérébrale** — F. Bremer.

662 — **Choline - Neuvine** - E. Kahane — J. Lévy.

726 — **La Structure et la Déformation des Solides** — R. L'Hermite.

727 — **Essais des Métaux** — R. L'Hermite.

Centre d'Information du Nickel

Résistance a la Corrosion du Nickel Pur et de Quelques Alliages de Nichel.

Forgeage et Matriçage du Nickel, du Monel et des Maillechorts.

L'Ellectrotecnica — Suplemento ao n.º 4, 25 de Fevereiro de 1939, comemorativo do XXV aniversário da Revista.

PUBLICAÇÕES PERIÓDICAS

PORTUGAL

A ARQUITECTURA PORTUGUESA E CERÂMICA E EDIFICAÇÃO — Janeiro de 1939.

AGROS — Janeiro-Fevereiro de 1939.

BOLETIM DE MINAS — Ano de 1935.

BOLETIM DA ORDEM DOS ENGENHEIROS — Fevereiro e Março de 1939.

BOLETIM DA JUNTA NACIONAL DA CORTIÇA — Março de 1939.

BOLETIM DA SOCIEDADE DE GEOGRAFIA — Novembro-Dezembro de 1938.

BROTÉRIA — Março de 1939.

CLÍNICA, HIGIENE E HIDROLOGIA — Janeiro de 1939.

ESTUDOS — Fevereiro e Março de 1939.

GAZETA DOS CAMINHOS DE FERRO — 16 de Março e 1 de Abril e 1939.

A INDÚSTRIA DO NORTE — Agosto, Outubro e Novembro-Dezembro de 1938 e Janeiro-Fevereiro de 1939.

INDÚSTRIA PORTUGUESA — Março de 1939.

NEPTUNO — Janeiro-Fevereiro de 1939.

O MUNDO PORTUGUÊS — Fevereiro e Março de 1939.

O SOLDADOR-CORTADOR — Janeiro de 1938.

OCIDENTE — Abril de 1939.

REVISTA AGRONÓMICA — N.os 3 e 4 de 1937.

REVISTA DOS CENTENÁRIOS — 31 de Janeiro de 1939.

REVISTA DA FACULDADE DE ENGENHARIA — Março de 1939.

REVISTA DE ARTILHARIA — Janeiro de 1939.

SEARA NOVA — N.os 602 a 608.

ALEMANHA

EL PROGRESSO DE LA INGENIERIA — Março e Abril de 1939.

BELGICA

BULLETIN DE L'ASSOCIATION INTERNATIONAL DU CONGRÈS DES CHEMINS DE FER — Março e Abril de 1939.

L'OSSATURE MÉTALIQUE — Fevereiro e Março de 1939.

BRASIL

BOLETIM DO INSTITUTO DE ENGENHARIA — Janeiro de 1939.

CRUZ DE MALTA — Ano III - N.º 18.

REVISTA BRASILEIRA DE ENGENHARIA — Dezembro de 1938, Janeiro de 1939.

FRANÇA

LA CHRONIQUE DES MINES COLONIALES — Março de 1939.

REVUE DE L'ALUMINIUM — Janeiro de 1939.

LA TÉCHNIQUE SANITAIRE ET MUNICIPALE — Janeiro de 1939.

ITÁLIA

ANNALI DEI LAVORI PUBBLICI — Novembro e Dezembro de 1938, Janeiro e Fevereiro de 1939.

L'ELETTROTECNICA — 25 de Fevereiro, 10 de Março e 25 de Março de 1939.

L'INGEGNERE — Fevereiro e Março de 1939.

REVISTA DEI CATASTO E DEI SERVIZI TECNICI ERARIALI — Janeiro-Fevereiro de 1939.

RADIO E TELEVI-IONE — Março de 1939.

TÉCNICA

REVISTA DE ENGENHARIA, DOS ALUNOS DO I. S. T.

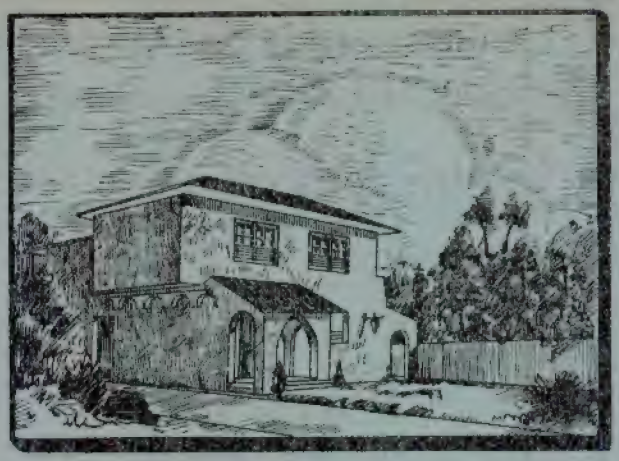
DIRECTOR: ROBERTO M. CHARTERS D'AZEVEDO

ADMINISTRADOR: PEDRO ARSÉNIO NUNES

BIBLIOTECÁRIO: CARLOS KRUS ABECASIS

CORPO REDACTORIAL: ISABEL MARIA GAGO, MANUEL REIS DE CARVALHO, ARTUR SILVA MARQUES

Propriedade e Edição da A. E. I. S. T.



AGÊNCIA TÉCNICA E ELECTROGRÁFICA

RUA ÁUREA, 140, 3.º
LISBOA Telef. 2 6849

CÓPIAS HELIOGRAFICAS
em traços *negro absoluto*
castanho, vermelho,
verde e violeta

Execução rápida, perfeita e económica

Enviamos mostruários e listas de preços

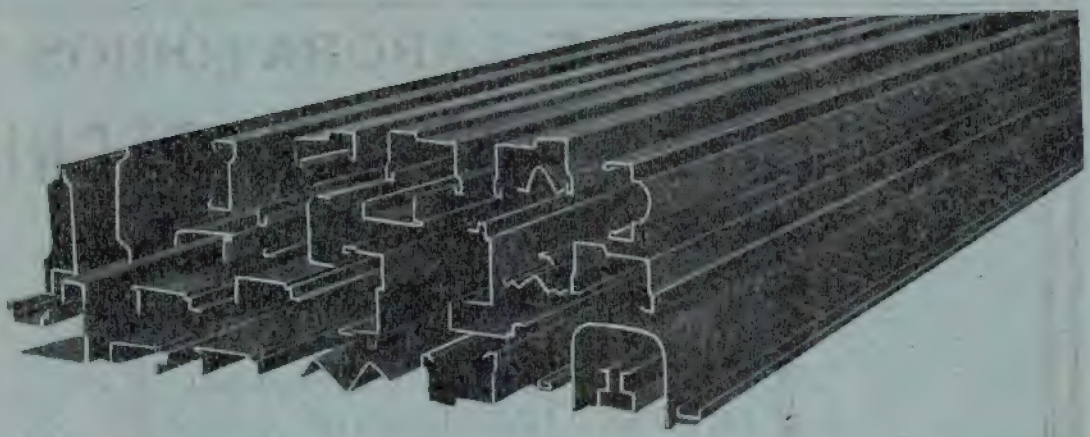
Artigos para desenho:

Estojos, punaises, papéis, etc., a preços moderados.

Projectos e orçamentos de construções civis e obras públicas.

Gabinete de Desenho.

ALGUNS EXEMPLOS DOS PERFIS QUE SE PODEM REALIZAR



LISBOA

FÁBRICA PORTUGAL

FABRICAÇÃO DE PERFIS DE CHAPA PARA TODOS OS GÉNEROS DE TRABALHOS DE CONSTRUÇÃO CIVIL

UMA REVOLUÇÃO NA CONSTRUÇÃO CIVIL

EMULSÕES
de asfalto para estradas

Todos os tipos e percentagens

TELEFONE 20879
Telegramas: Epalda — LISBOA

FÁBRICA EM SACAVÉM

Granulados de mármores
para exportação e para o país

Mosaicos de granulados de mármore

OS MAIS BONITOS
OS MAIS RESISTENTES
OS MAIS VANTAJOSOS

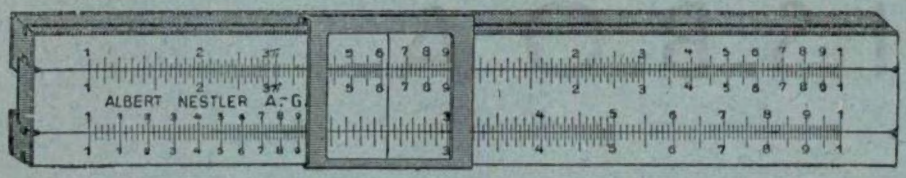
Soc. Portuguesa CADAN
Rua D. Estefania, 42
Telefone 47812 *Lisboa*

OFICINAS E LABORATÓRIOS DO INSTITUTO SUPERIOR TÉCNICO

As oficinas pedagógicas do Instituto Superior Técnico, de CARPINTARIA DE MOLDE, de INSTRUMENTOS DE PRECISÃO e de ELECTROTÉCNICA, fornecem todo o género de material escolar e de demonstração para o ensino técnico. Nos laboratórios de QUÍMICA ANALÍTICA, FÍSICA INDUSTRIAL E DE MINERALOGIA executam-se análises para o público

Para quaisquer informações, dirigir-se ao secretário da comissão executiva

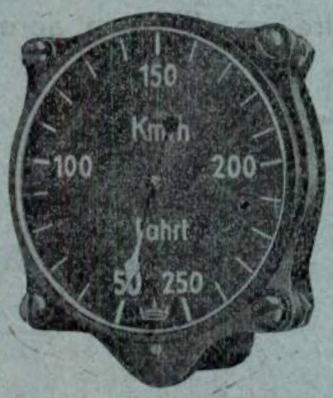
ORGANIZAÇÃO



Exercemos a nossa actividade com instrumentos e **métodos de trabalho** que nos permitem servir bem os mais exigentes.

Com precisão e rapidez, achamos quando é preciso as caracteristicas dum fornecimento importante feito há muito, ou as instruções de manejo dum aparelho vendido por nós, ou o preço duma remessa para as Colónias.

Mais cara para nós, mas de maior rendimento, traduz-se esta organização, para todos os clientes inteligentes, na sua **máxima satisfação.**



MATERIAL TOPOGRAFICO
MATERIAL PARA DESENHO
APARELHOS PARA ENSINO
MATERIAL DE LABORATÓRIO
INSTRUMENTOS ÓPTICOS
FERRAMENTAS DE PRECISÃO
LIVROS TÉCNICOS E EDUCATIVOS

PIMENTEL & CASQUILHO, L.DA - Engenheiros

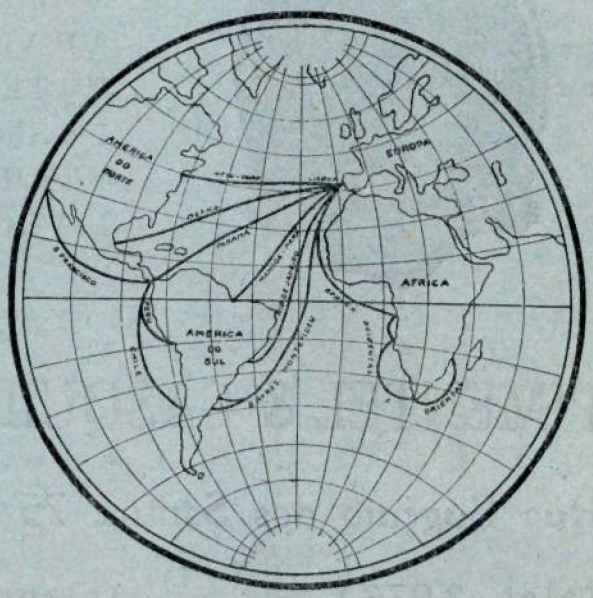
Rua Eugénio dos Santos, 75 (Esquina Trav. S.to Antão)

Telef. 20777 **Telegr. TECNA** **LISBOA**

PÔRTO DE LISBOA

Grande pôrto, pela sua posição geográfica, extensão e profundidade, com excepcionais condições de abrigo.
Cais, docas e aparelhagem com abundância.
Estaleiros de construção e reparação de navios.
Movimento de navios e de mercadorias notável.
Comunicações com tôda a Europa, por via terrestre, marítima e aérea.

Dos grandes portos da Europa é o mais próximo dos Estados Unidos da América do Norte, da América Central, da América do Sul e da África Ocidental.



Engenheiros!
Arquitectos!
Proprietários!
Mestres de obras!
Donas de casa!

As nossas 12 fábricas de produtos cerâmicos espalhadas pelo País, produzindo do barro vermelho a porcelana estão ao vosso serviço, estando também ao vosso serviço os nossos depósitos de exposição e venda em

Porto, Lisboa, Coimbra, Braga, Faro, Portimão, Leiria, Algoz, Santarém, Setúbal e Funchal.

Sem verificardes os nossos novos preços e qualidades, não deveis comprar

Azulejos brancos, decorados e artísticos
Ladrilhos de Cimento
Louças Sanitárias
Porcelanas de mesa e para electricidade
Louças de Faiança para Mesa e Cosinha
Telhas e Tijolos
Mosaicos de Grez Cerâmico
Produtos refractários
Louças decorativas

Companhia das Fábricas Cerâmica Lusitânia

Sede: R. DO ARCO CEGO, 88 — LISBOA

DEPENDENCIAS DO PORTO

Fábrica: Quinta do Roriz — Monte do Seminário — Escritório: Rua José Falcão, 174
Dependências de Coimbra: Estação Velha — Loreto

E' DO VOSSO INTERESSE PREFERIR OS NOSSOS PRODUTOS

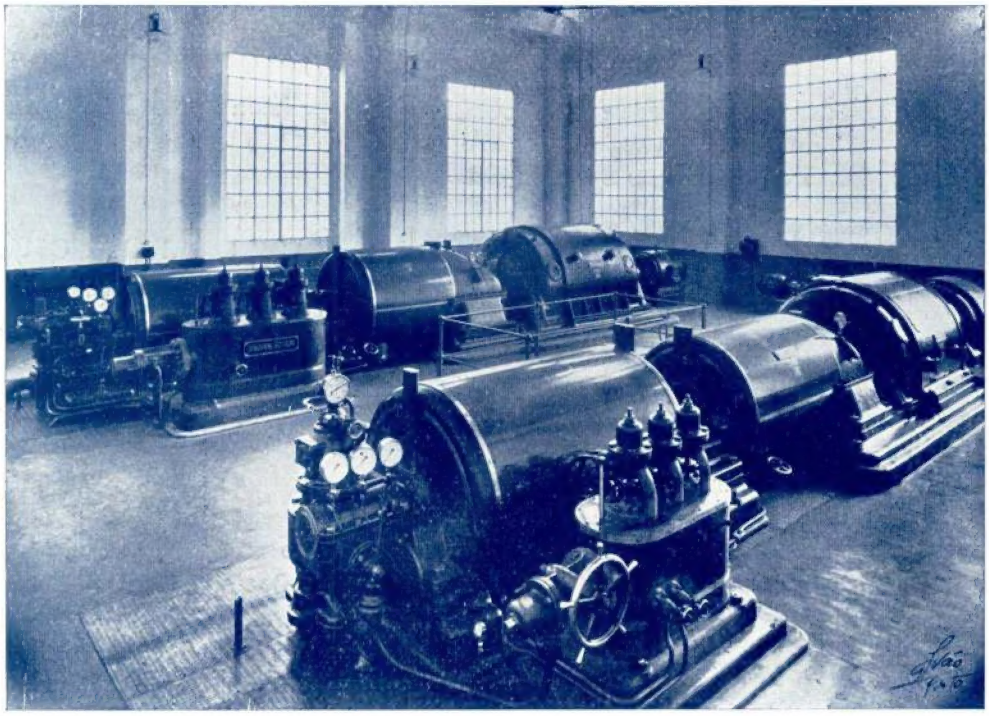
SOCIEDADE ANÓNIMA

BROWN, BOVERI & CIE.

BADEN (SUISSA)

A firma que instalou o maior número de kilowatts nas centrais Eléctricas Portuguesas

A firma que montou o maior número de turbinas a vapor em Portugal



SETÚBAL

Central da Cachofarra da Sociedade de Electrificação Urbana e Rural
Turbo-grupos a vapor «Brown-Boveri» de 2000 e de 6400 kilowatts

Representante geral para Portugal e Colónias:

EDOUARD DALPHIN

Escritório Técnico: Rua Passos Manuel, 191, 2.º // PORTO // Tel. 2 411

Máquinas eléctricas, transformadores, mutadores, aparelhos para alta e baixa tensão. Montagem completa de centrais termo e hidro-eléctricas. Electrificação de fábricas e de caminhos de ferro. Locomotivas, e auto-motoras eléctricas e Diessel-eléctricas. Máquinas de extracção. Turbinas a vapor. Geradores de vapor Velox. Máquinas frigoríficas. Grupos e transformadores para a soldadura pelo arco. Fornos eléctricos. Comandos eléctricos especiais para tôdas as máquinas utilizadas nas Fábricas de Fiação, Tecelagem, Acabamentos, Estamparia, Cimento, Moagem, etc.